



ИФТЭБ НИЯУ **МФИ**
ИНСТИТУТ ФИНАНСОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Математические методы в задачах финансового мониторинга

4. Метод анализа иерархий

Москва 2023



Введение

Цель метода анализа иерархий – обоснование выбора наилучшей из предлагаемых альтернатив, характеристиками которых являются векторы с разнородными, в том числе и с нечетко определенными, отдельными компонентами.

Суть метода анализа иерархий заключается в поэтапном решении следующих взаимосвязанных частных задач:

- построение иерархической структуры показателей (признаков);
- оценивание значимости отдельных частных показателей для каждого уровня иерархии;
- сравнение имеющихся альтернатив и выбор наилучшей из них.



Введение

Метод анализа иерархий включает в себя базовые процедуры, такие как:

- ☐ результаты парных сравнений, которые затем выражаются численно;
- ☐ оценки приоритетности критериев;
- ☐ оценки альтернативных решений и
- ☐ нахождение лучшего из них.

Полученные значения являются оценками в шкалах сравнений, что соответствует жёстким оценкам.

При использовании метода лицо, принимающее решение, должно иметь представление о том, какой из объектов для него предпочтительнее в каком-либо смысле, то есть, по сути, быть экспертом в области.



Метод анализа иерархий: преимущества МАИ

Построение иерархии хорошо **согласуется с принципами системного подхода** и может оказать существенную помощь исследователю при анализе задачи – в частности, иерархизация помогает обеспечить отсутствие «пробелов» в модели, а также выявить ситуации, связанные с избыточностью ее компонентов, возможностью дублирования расчетов и др.;

Метод **предоставляет процедуры оценки и сравнения альтернатив по неизмеримым** (выражающим качественные понятия), субъективным критериям. Эти же процедуры могут использоваться для формализации предпочтений на множестве критериальных оценок, измеренных в произвольной (в том числе номинальной или порядковой) шкале, а также для выявления степеней относительной важности критериев;

Метод **устойчив к небольшим нарушениям согласованности** (транзитивности) суждений ЛПР и экспертов.

МАИ **ориентирован в первую очередь на построение моделей выбора** на конечном множестве заранее известных **альтернатив**.



Этапы МАИ

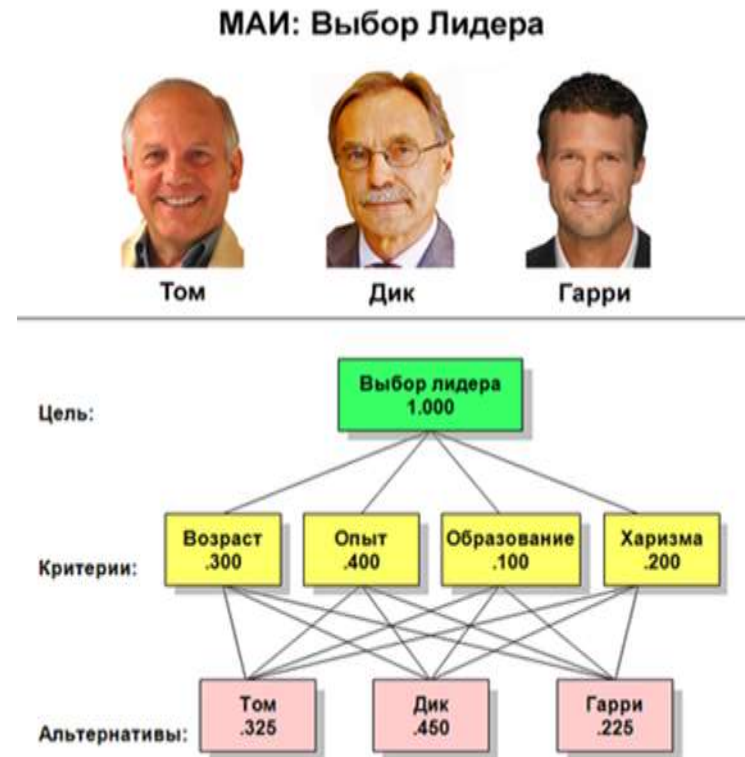
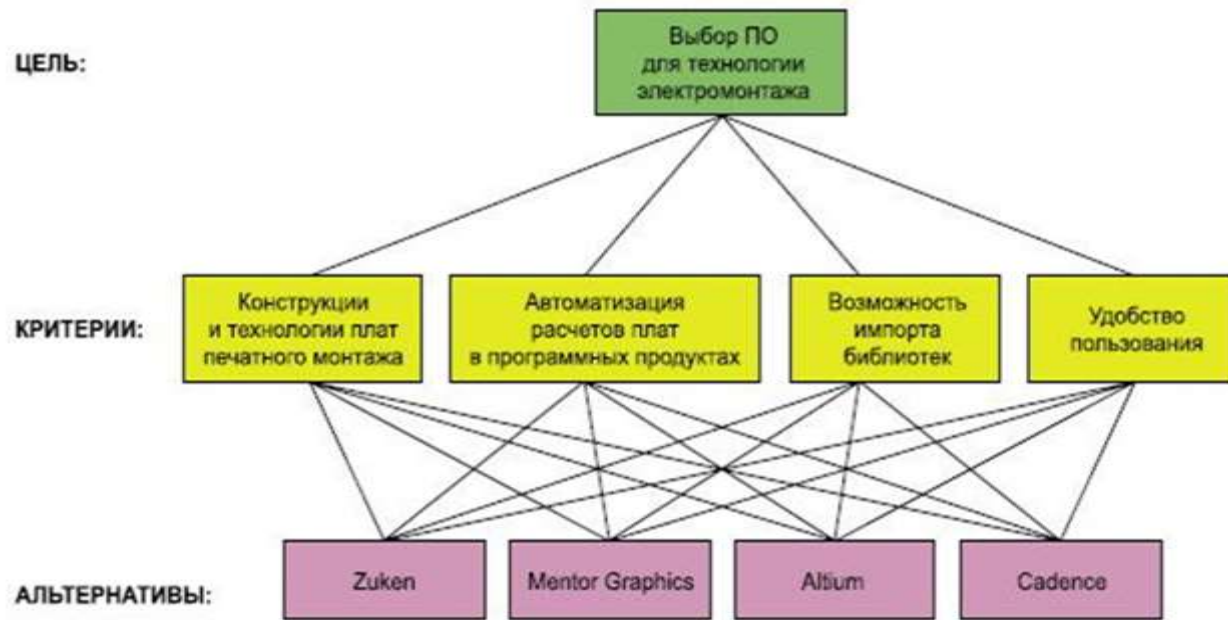
1 этап. Описание проблемы и определение цели исследований.

2 этап. Построение иерархии:

- начиная с уровня вершины (цели),
- через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни), и
- к самому нижнему уровню (перечню выбираемых альтернатив).



Примеры иерархий





Этапы МАИ

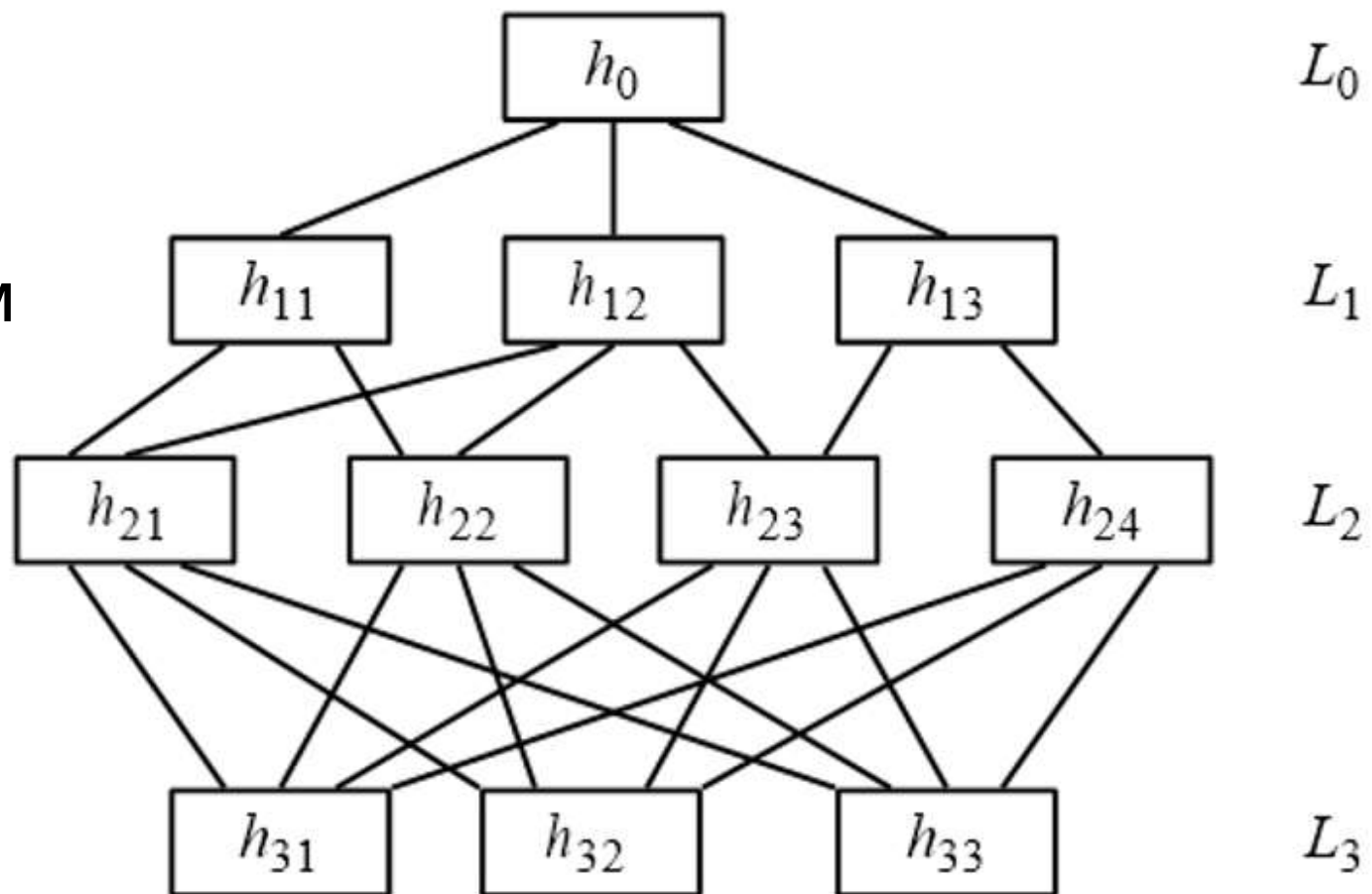
Несбалансированной иерархией называется иерархия, у которой не каждый объект верхнего уровня связан с каждым нижним.

В противном случае она называется *сбалансированной*, или *полной*.



Этапы МАИ

Такая иерархия
является
несбалансированной:
критерий h_{11} не
связан с нижестоящим
критерием h_{23} .





Этапы МАИ

3 этап. Построение матриц влияния (весов) элементов верхнего уровня на элементы нижнего – по одной матрице для каждого элемента примыкающего сверху уровня.

Элементы каждого уровня* сравнивают между собой по степени их воздействия на элемент предыдущего уровня и получают квадратную матрицу суждений. Например, в нашем случае на уровне L_2 получим $||L_1|| = 3$ матриц размерностью $||L_2|| \times ||L_2|| = 4 \times 4$. Матрица наполнена элементами – результатами попарных сравнений элементов 2-го уровня по шкале Саати относительно влияния на элемент уровня 1.

Полученная матрица является обратно-симметричной, поэтому $\lambda_{max} \geq n$.

* Если иерархическая структура не является полной, то возможно уменьшение количества сравнений (с обычного $\frac{n(n-1)}{2}$).



Этапы МАИ

Результатом опроса эксперта при данном методе является матрица:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, i, j = \overline{1..n},$$

где n – число точек, в которых сравниваются элементы.

При этом эксперт оперирует понятиями, представленными по так называемой *9-балльной шкале Саати*:



Шкала Саати

Смысл сравнения (элемента матрицы)	A_{ij}
Отсутствие преимущества $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	1
Слабое преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	3
Существенное преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	5
Явное преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	7
Абсолютное преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	9
Промежуточные сравнительные оценки (применяются в компромиссном случае)	2, 4, 6, 8
Обратные величины (например, если при сравнении элементов получили 4, при обратном сравнении будет $\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$



Таким образом,

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \left(\frac{w_i}{w_j} \right)_{n \times n},$$

то есть a_{ij} представляет собой отношение весов рассматриваемых элементов.



Свойства полностью согласованной матрицы попарных сравнений

- 1) Все элементы матрицы положительны;
- 2) Матрица обратна симметрична, т.е. $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$;
- 3) Все элементы главной диагонали равны единице: $a_{ii} = 1$;
- 4) Свойство *транзитивности*, или согласованности:

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj} = \frac{w_i w_k}{w_k w_j} = \frac{w_i}{w_j} = a_{ij};$$

- 5) Число $n = \lambda_{max}$ является максимальным собственным значением матрицы, а вектор-столбец $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ – единственным (если он нормирован) соответствующим правым собственным вектором, т.е.

$$\exists! \lambda_{max}: Aw = \lambda_{max}w.$$



4 этап. Определение весов элементов одного уровня.

Задача: из группы матриц сформировать группу «локальных приоритетов».

Один из способов решения: относительную значимость каждого элемента будем вычислять на основе собственных векторов, соответствующих максимальным собственным числам матриц, для всех матриц, а затем нормировать результаты для получения вектора приоритетов.



Этапы МАИ

Вычисление собственных чисел матрицы – это очень трудоёмкая задача и «очень грустно решать характеристическое уравнение».

Поэтому в МАИ используется приближённый метод вычисления собственных векторов: веса вычисляются как среднее геометрическое элементов соответствующей строки матрицы:

$$w_j = \sqrt[n]{\prod_{l=1}^n a_{jl}}, \quad \text{а затем нормируются:} \quad w_j = \frac{w_j}{\sum_l w_l}.$$

Если ввести в рассмотрение матрицу влияний элементов нижнего уровня на элементы предыдущего уровня W_l , где l – номер уровня иерархии, то векторы w будут являться ее столбцами.

Таким образом, собирается матрица W_l , где l – номер уровня иерархии.



Этапы МАИ

5 этап. Определение согласованности.

Если мы строили всю верхнюю половину матрицы попарных сравнений по шкале Саати, не прибегая к транзитивности значений, матрица в общем-то не будет согласованной. Поэтому параллельно с вычислением каждой матрицы проводится оценка степени отклонения её от согласованности.

Оценка согласованности основывается на приближенном вычислении максимального собственного числа матрицы:

$$\lambda_{max} = \sum_{j=1}^n w_j \sum_{i=1}^n a_{ij} .$$

(суммируется каждый столбец матрицы суждений, и сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного вектора приоритетов, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т. д.) Справедливо неравенство $\lambda_{max} \geq n$



Этапы МАИ

Находят *индекс согласованности (однородности)*, сравнивая который с соответствующими средними значениями случайных элементов, получают *отношение согласованности*.

$$\text{ИО} \equiv \text{ИС} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

Для полностью согласованной матрицы $\lambda_{\max} = n$, и поэтому ИС будет равен 0. Полученный ИС сравнивают с величиной, которая получилась бы при случайном выборе количественных суждений из шкалы Саати 1/9, 1/8, ..., 9 и формировании обратно-симметричной матрицы, и получают *отношение согласованности*:



Этапы МАИ

Таблица $M(ИО)$ – статистически известная (как, например, таблица критических точек распределения):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(ИО)$	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51

Величина ОС, как правило, должна быть не более 10% (20%?), чтобы быть приемлемой и чтобы считать матрицу согласованной.

6 этап. Проведение этапов 3–5 на всех уровнях иерархии.



Этапы МАИ

7 этап. Производится поэтапная оценка весовых коэффициентов элементов каждого следующего уровня иерархии:

$$C_i = C_{i-1} W_i,$$

где C_i – вектор весовых коэффициентов предыдущего уровня;

W_i - матрица влияний элементов нижнего уровня на элементы предыдущего уровня;

i – номер уровня иерархии.

Результат – оценка альтернатив.



Этапы МАИ

8 этап. Оценка согласованности иерархии в целом.

- ☐ Согласованность всей иерархии можно найти, перемножая каждый индекс согласованности на приоритет соответствующего критерия и суммируя полученные числа.
- ☐ Затем результат делится на выражение такого же типа, но со случайным индексом согласованности, соответствующим размерам каждой взвешенной приоритетами матрицы.
- ☐ Приемлемым является отношение согласованности около 10 % или менее.



Пример

Требуется выбрать наиболее предпочтительную стратегию развития одной из машиностроительных отраслей в стране.

Имеется 3 сценария:

- импорт соответствующей продукции;
- создание только сборочного производства;
- создание полного производственного цикла.

Считается, что при каждом подходе качество продукции будет примерно одинаковым.



Пример

При принятии решения учитываются мнения:

- представителей отрасли: их интересует только прибыль;
- представителей потребления: их интересуют низкие цены и достаточно быстрые сроки поставки продукции;
- государственных органов: они заинтересованы прежде всего в налоговых поступлениях, затем в создании новых рабочих мест и, наконец, низких ценах на продукцию.

Известно, что наибольшее влияние на принятие решения могут оказать потребители, немного меньшие и примерно равные – представители отрасли машиностроения и государство.



Пример

Характеристики сценариев:

- относительно прибыли:

- при полном импорте прибыль отсутствует;
- при создании сборочного производства прибыль составит ~15 млн д.е. в год;
- при создании полного цикла прибыль составит ~30 млн д.е. в год.

- относительно цены:

- минимальная при сборочном пр-ве;
- чуть больше при полном импорте;
- самая высокая при полном цикле.

- относительно сроков:

- при полном импорте 5-6 месяцев;
- при сборочном производстве 3-4 года;
- при полном цикле 5-6 лет.

- относительно налогов:

- при импорте 2 млн д.е. в год;
- при сборочном производстве 8 млн;
- при полном цикле 9 млн.

- относительно рабочих мест:

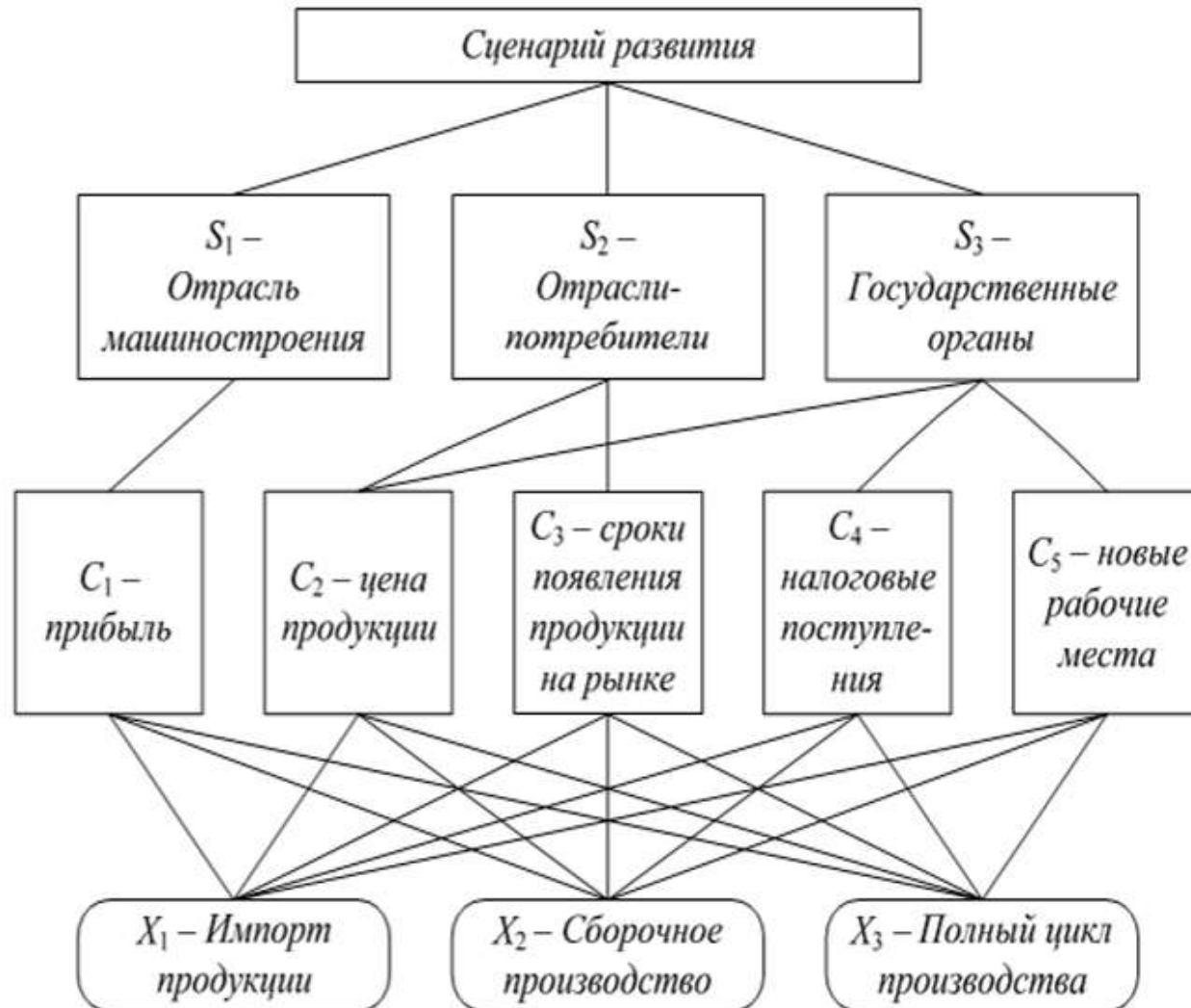
- при импорте нет рабочих мест;
- при сборочном произ-ве 6000 новых мест;
- при полном цикле 7000 новых мест.



Пример

Рассмотрим
представленную
иерархию.

Отметим, что она в общем-то не
является сбалансированной.





Пример

Перейдем к описанию процесса построения модели выбора.

Шаг 1. Анализ задачи и построение иерархии. Иерархическое представление задачи.

Шаг 2. Вычисление локальных приоритетов и оценка согласованности суждений.

Используя метод парных сравнений, определим следующие показатели:

- приоритеты элементов S_j относительно главной цели (оценки влияния заинтересованных сторон на выбор сценария);
- приоритеты критериев C_k относительно элементов S_j (степени важности критериев для каждой из заинтересованных сторон);
- приоритеты альтернатив X_j (сценариев развития) относительно критериев C_k .



Пример

Составим матрицы попарных сравнений для каждого уровня:

С этой целью построим необходимые матрицы парных сравнений и для каждой матрицы рассчитаем нормализованный вектор приоритетов (W), максимальное собственное число (λ_{max}) и отношение согласованности (CR).

Уровень L_0 :

Какой субъект оказывает наибольшее влияние на направление развития отрасли?						
	S1	S2	S3	ΣS	W	W_n
S1	1	1/3	1	2,33	0,693	0,2
S2	3	1	3	7,00	2,080	0,6
S3	1	1/3	1	2,33	0,693	0,2
ΣS	5	1 2/3	5			
λ_{max}	3,00					
CI (ИС)*	0,00	CR (ОС)*	0			

Эта матрица полностью согласованна. Она же является итоговой матрицей 1 уровня, потому что альтернатива на верхнем уровне всего одна – исходная гипотеза.

* CI – consistency index (индекс согласованности), CR – consistency ratio (отношение согласованности).



Пример

В этой матрице, например, элемент $a_{12} = 1/3$ означает, что субъект S_1 (представители машиностроительной отрасли) имеет немного меньшее влияние на выбор сценария, чем S_2 (представители отраслей- потребителей).

Элемент $a_{13} = 1$ означает, что представители машиностроительной отрасли и государственные органы (субъект S_3) имеют примерно равное влияние.

Нетрудно видеть что построенная матрица сверхтранзитивна, что является следствием полной согласованности ее элементов. Соответственно, для нее $\lambda_{max} = 3$ и $CR = 0$.



Пример

Уровень L_1 : Вычислим приоритеты критериев C_k относительно элементов S_j .

Какой критерий более важен для отраслей-потребителей?					
S1	C2	C3	ΣC	W	Wn
C2	1	5	6	2,236068	0,833
C3	1/5	1	1 1/5	0,447214	0,167
ΣC	1,20	6,00			
λ_{max}	2,00				
CI	0,00	CR	0,00		

Двух других субъектов (S_2 – отрасли-потребители и S_3 – государственные органы) интересуют несколько критериев, поэтому необходимо сравнение последних по важности. Соответствующие матрицы парных сравнений и результаты их обработки представлены в таблице.

Представители машиностроительной отрасли заинтересованы только в получении прибыли. Поэтому сравнение критериев не требуется.

Локальный приоритет критерия C_1 (прибыль) для данного субъекта равен единице: $w_{11}^{1,2}=1$, приоритеты остальных критериев – нулевые.

Какой критерий более важен для государственных органов?						
S3	C2	C4	C5	ΣC	W	Wn
C2	1	1/7	1/5	1,34	0,306	0,075057
C4	7	1	2	10,00	2,410	0,591727
C5	5	1/2	1	6,50	1,357	0,333216
ΣC	13	1 2/3	3 1/5			
λ_{max}	3,01					
CI	0,0071	CR	0,0122			



Пример

Составляется матрица влияния W_{12} для этого уровня:

	C1	C2	C3	C4	C5	Σ
S1	1	0	0	0	0	1
S2	0	0,833333	0,166667	0	0	1
S3	0	0,075057	0	0,591727	0,333216	1

Какой критерий более важен для отраслей-потребителей?					
S1	C2	C3	ΣC	W	Wn
C2	1	5	6	2,236068	0,833
C3	1/5	1	1 1/5	0,447214	0,167
ΣC	1,20	6,00			
λ_{max}	2,00				
CI	0,00	CR	0,00		

Какой критерий более важен для государственных органов?						
S3	C2	C4	C5	ΣC	W	Wn
C2	1	1/7	1/5	1,34	0,306	0,075057
C4	7	1	2	10,00	2,410	0,591727
C5	5	1/2	1	6,50	1,357	0,333216
ΣC	13	1 2/3	3 1/5			
λ_{max}	3,01					
CI	0,0071	CR	0,0122			



Пример

Уровень L_2 : Строятся матрицы парных сравнений альтернатив X_j относительно критериев C_k

Какой сценарий более предпочтителен с точки зрения прибыли?					Какой сценарий более предпочтителен с точки зрения цены продукции?				
	X_1	X_2	X_3	W		X_1	X_2	X_3	W
X_1	1	1/6	1/9	0,058	X_1	1	1/2	7	0,346
X_2	6	1	1/3	0,278	X_2	2	1	9	0,597
X_3	9	3	1	0,664	X_3	1/7	1/9	1	0,057
$\lambda_{\max} = 3,054; CI = 0,027; CR = 0,046$					$\lambda_{\max} = 3,022; CI = 0,011; CR = 0,019$				

И так ещё 3 матрицы для каждого критерия.



Пример

Уровень L_2 : Строятся матрицы парных сравнений альтернатив X_j относительно критериев C_k

Элемент $a_{21}=6$ означает, что с точки зрения прибыли сценарий X_2 (создание сборочного производства) значительно более предпочтителен, чем X_1 (ориентация на импорт), а сценарий X_3 (создание полного цикла производства) имеет максимально возможное превосходство над X_1 по критерию прибыли ($a_{31}=9$).

Это видно из постановки задачи: в случае ориентации на импорт машиностроительное производство почти не получает прибыли, а в случае развития производства – получает прибыль в размере около 15 млн. д.е. в год (для сборочного производства) или примерно 30 млн. д.е. в год (для полного цикла производства).

При этом оценка $a_{32}=3$ может быть интерпретирована так: превосходство сценария X_3 над X_2 имеется, но оно не столь велико, как в случае сравнения любого из них со сценарием X_1 , который вообще не является прибыльным.



Пример

Уровень L_2 : Строятся матрицы парных сравнений альтернатив X_j относительно критериев C_k

Какой сценарий более предпочтителен с точки зрения сроков появления продукции на				
	X_1	X_2	X_3	W
X_1	1	5	9	0,751
X_2	1/5	1	3	0,179
X_3	1/9	1/3	1	0,070
$\lambda_{\max} = 3,029$; $CI = 0,015$; $CR = 0,025$				

Какой сценарий более предпочтителен с точки зрения налоговых поступлений?				
	X_1	X_2	X_3	W
X_1	1	1/7	1/8	0,061
X_2	7	1	1/2	0,353
X_3	8	2	1	0,586
$\lambda_{\max} = 3,035$; $CI = 0,017$; $CR = 0,030$				

Какой сценарий более предпочтителен с точки зрения создания новых рабочих мест?				
	X_1	X_2	X_3	W
X_1	1	1/8	1/9	0,054
X_2	8	1	1/2	0,357
X_3	9	2	1	0,589
$\lambda_{\max} = 3,037$; $CI = 0,018$; $CR = 0,032$				

Как видно из таблиц, все матрицы парных сравнений имеют достаточную степень согласованности.



Пример

Составляется матрица влияния W_{23} для этого уровня:

	x1	x2	x3	Σ
c1	0,058	0,278	0,664	1
c2	0,346	0,597	0,057	1
c3	0,751	0,179	0,07	1
c4	0,061	0,353	0,586	1
c5	0,054	0,357	0,589	1



Пример

Синтез приоритетов альтернатив относительно главной цели и оценка общей согласованности иерархии.

Для выполнения иерархического синтеза *полученные матрицы перемножаем* и получаем:

$$\begin{aligned} A &= W^{0,1} \times W^{1,2} \times W^{2,3} = \\ &= (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0,167 & 0 & 0 \\ 0 & 0,075 & 0 & 0,592 & 0,333 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,058 & \dots & 0,664 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,054 & \dots & 0,589 \end{pmatrix} \\ &= (0,276 \quad \mathbf{0,446} \quad 0,278). \end{aligned}$$

Таким образом, вероятнее всего окажется принятие стратегии №2 – создание сборочного производства.



Пример

Таким образом глобальные приоритеты альтернатив X_1 (ориентация на импорт продукции), X_2 (создание сборочного производства) и X_3 (организация полного цикла производства) равны соответственно (0,276 0,446 0,278).

Чем выше глобальный приоритет, тем более предпочтителен соответствующий сценарий развития отрасли. Таким образом, в условиях рассматриваемой иерархической модели наиболее предпочтительным сценарием является развитие сборочного производства (X_2). Это решение не приводит к сокращению сроков появления продукции на рынке, но оно обеспечивает высокие объемы налоговых поступлений и способствует созданию достаточно большого количества рабочих мест. Наиболее же сильной стороной сценария X_2 , благодаря которой он получил наибольшую оценку, является обеспечение минимальной цены на продукцию, поскольку критерий C_2 имеет высокую важность для отраслей-потребителей, которые в свою очередь оказывают самое большое влияние на выбор. Отметим, что две оставшиеся альтернативы получили меньшие, но при этом практически одинаковые итоговые оценки. Это связано с тем, что соответствующие сценарии имеют в точности противоположное, но при этом примерно равное соотношение сильных и слабых сторон – превосходство полного цикла производства продукции над ее импортом с позиций прибыли, налоговых поступлений и новых рабочих мест компенсируется проигрышем по таким показателям как цена и сроки появления продукции на рынке.



Пример

Оценим общую согласованность иерархии.

Для расчета глобального индекса согласованности нужно вычислить:

$$\begin{aligned} C &= CI_0 + W^{0,1} \times CI_1 + W^{0,1} \times W^{1,2} \times CI_2 \\ &= 0 + (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,007 \end{pmatrix} + (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0,167 & 0 & 0 \\ 0 & 0,075 & 0 & 0,592 & 0,333 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,027 \\ 0,011 \\ 0,015 \\ 0,017 \\ 0,018 \end{pmatrix} = 0,017. \end{aligned}$$



Пример

Для расчета глобального отношения согласованности нужно вычислить:

$$\begin{aligned} CS &= CIS_0 + W^{0,1} \times CIS_1 + W^{0,1} \times W^{1,2} \times CIS_2 \\ &= 0,58 + (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,58 \end{pmatrix} + (0,2 \quad 0,6 \quad 0,2) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,833 & 0,167 & 0 & 0 \\ 0 & 0,075 & 0 & 0,592 & 0,333 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \\ 0,58 \end{pmatrix} \\ &= 1,276. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R = \frac{C}{CS} = \frac{0,017}{1,276} \approx 0,013 = 1,3\% < 10\%,$$

В силу чего можно сделать вывод об общей согласованности нашей иерархической модели.