



ИФТЭБ НИЯУ
МЭФ
ИНСТИТУТ ФИНАНСОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Математические методы в задачах финансового мониторинга

Отношения

Косвенные методы построения функции принадлежности

Москва 2023



Отношения

Нечеткие отношения играют фундаментальную роль в теории нечетких систем. Аппарат теории нечетких отношений используется при построении теории нечетких автоматов, при моделировании структуры сложных систем, при анализе процессов принятия решений.

Теория нечетких отношений находит также приложение в задачах, в которых традиционно применяется теория обычных (четких) отношений.



Как правило, аппарат теории четких отношений используется при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы

- когда связи носят дихотомический характер и могут быть проинтерпретированы в терминах "связь присутствует", "связь отсутствует"
- когда методы количественного анализа взаимосвязей по каким-либо причинам неприменимы и взаимосвязи искусственно приводятся к дихотомическому виду.



Отношения

В чётких отношениях проводятся различные сравнительные анализы, анализы связей. Мы чётко можем ответить на вопрос – есть такая связь или нет.

$x < y$ – чёткое отношение.

Чёткое отношение можно показать в виде графа.

В нечётких отношениях на графе можно показывать, например, вес каждой дуги, т. е. силу каждой взаимосвязи

Все нечёткие отношения можно свести к дихотомическим, или чётким. Однако не всегда стоит пытаться это сделать.



Отношения

Методы анализа данных, основанные на теории нечетких отношений, позволяют проводить качественный анализ систем с учетом различия в силе связей между объектами системы



Четкие отношения

Бинарным отношением R на множестве X называется некоторое подмножество декартова произведения $X \times X$. Соответственно, задать отношение R на множестве X означает указать все пары (x, y) , которые связаны отношением R . Например, на множестве $X = \{0, \dots, 10\}$ отношению $x < y, x \leq 5$ удовлетворяют пары $(0, 1), (0, 2), \dots, (1, 2), \dots, (5, 10)$.

Для обозначения того, что элементы связаны отношением, используем xRy или $(x, y) \in R$.



Нечётким отношением R на универсальном множестве $U = U_1 \times U_2$ называется нечёткое подмножество декартова произведения, которое характеризуется такой функцией принадлежности $\mu_{R(x,y)}$, что $U_1 \times U_2 \rightarrow [0,1]$.

При этом $\mu_{R(x,y)}$ принимается как субъективная мера выполнения отношения xRy .



Отношения

Пусть $U_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $U_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$.

Тогда отношение R может быть задано, например, в виде таблицы:

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,3	0	0,4
x_2	0,2	1	0,3	0,7
x_3	0	0,9	0,1	0,2



Отношения

Примеры:

1. нечёткое отношение R , « x и y близкие друг к другу числа» можно задать функцией принадлежности:

$$\mu_{R(x,y)} = e^{-2k(x-y)^2}.$$

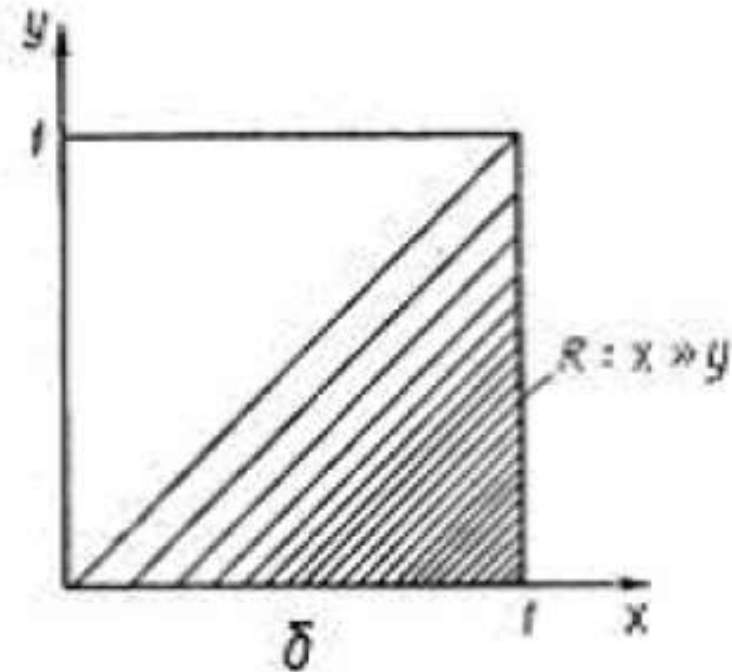
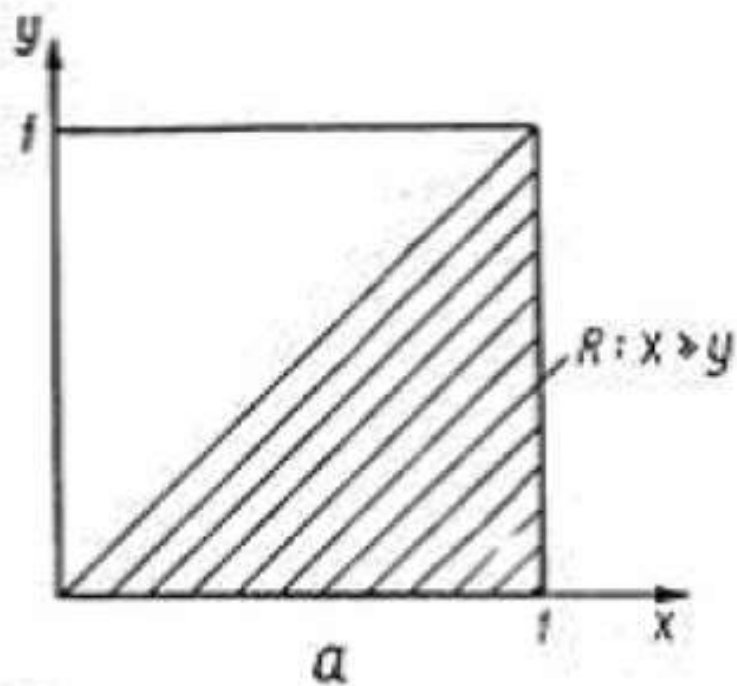
2. нечёткое отношение $R(>>, x >> y)$ (x «намного» больше y) можно задать, например, такой функцией принадлежности:

$$\mu_{R(x,y)} = \begin{cases} 0, x \leq y \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{(x-y)^2}}, x > y. \end{cases}$$



Отношения

- а) четкое отношение $R_1 (\geq, x \geq y)$, где $x \in [0, 1]$;
б) нечеткое отношение $R_2 (>>, x >> y)$





Отношения

В случае конечных или счетных универсальных множеств очевидна интерпретация нечеткого отношения в виде взвешенного графа, в котором каждая пара вершин (x, y) из $X \times Y$ соединяется ребром с весом $R(x, y)$.

Пример. Пусть $X = x_1, x_2$ и $Y = y_1, y_2, y_3$, тогда нечеткий граф, изображенный на рис [рис. 2.1](#), задает некоторое нечеткое отношение $R \subset X \times Y$.

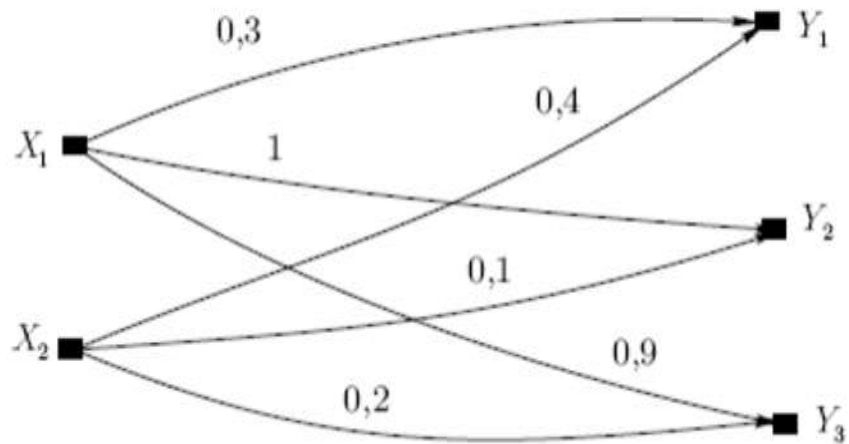


Рис. 2.1.



Отношения

На нечёткие отношения *распространяются абсолютно все те же определения и операции*, которые вводились для нечётких множеств. При этом отношения, с которыми проводятся операции, должны быть одними и теми же подмножествами одного и того же декартово произведения. Например, **носителем** отношения являются такие пары:

$$\text{supp}^R = \{(x, y) : \mu_{R(x,y)} > 0, x \in U_1, y \in U_2\}.$$

Определяются также **пересечение, объединение, отрицание** отношения(-ий).



Отношения

Обратное к R отношение на X определяется следующим образом: $xR^{-1}y \leftrightarrow yRx$, при этом функции принадлежности связаны равенством:

$$\mu_{R^{-1}}(x, y) = \mu_R^{-1}(x, y).$$

Обычное отношение, ближайшее к нечёткому – это отношение $\underline{R}$, определяемое функцией принадлежности:

$$\mu_{\underline{R}} = \begin{cases} 0, \mu_R < 0,5 \\ 1, \mu_R > 0,5 \\ 0 \text{ или } 1, \mu_R = 0,5 \end{cases}$$



Обычном подмножеством α -уровня нечёткого отношения называется подмножество:

$$G = \{(x, y): \mu_R(x, y) \geq \alpha\}.$$

Например, для нечёткого отношения:

$$\mu_R(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Подмножество уровня 0,3 будет определяться как:

$$G_{0,3}: 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq 0,3 \rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{3}{7}.$$



Композиция нечетких отношений

1) **Максиминная** композиция AB нечётких отношений A и B на универсуме U характеризуется функцией принадлежности вида:

$$\mu_{AB}(x, z) = \max_{y \in U} \min\{\mu_A(x, y), \mu_B(y, z)\}$$

2) **Минимаксная композиция** $A^\circ B$ нечётких отношений A и B на U характеризуется функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A^\circ B}(x, z) = \min_{y \in U} \max\{\mu_A(x, y), \mu_B(y, z)\}$$

3) **Максимумультипликативная композиция** $A*B$ нечётких отношений A и B на U характеризуется функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A*B}(x, z) = \sup_{y \in U} \{\mu_A(x, y) \cdot \mu_B(y, z)\}.$$



Композиция нечетких отношений

Пример. Найти результаты композиций для следующих отношений:

$\mu_A(x, y)$	y_1	y_2
x_1	0,2	0,6
x_2	0,5	0,8

$\mu_B(y, z)$	z_1	z_2
y_1	0,5	0,7
y_2	0,3	1



Композиция нечетких отношений

$\mu_{AB}(x, z)$	z_1	z_2
x_1	0,3	0,6
x_2	0,5	0,8

$\mu_{A \circ B}(x, z)$	z_1	z_2
x_1	0,5	0,7
x_2	0,5	0,7

$\mu_{A * B}(x, z)$	z_1	z_2
x_1	0,18	0,6
x_2	0,25	0,8



Косвенные методы построения функции принадлежности

Прямые методы построения функции принадлежности используются, когда исходные данные количественные. Косвенные – когда данные представлены качественно, или категориально.

Наиболее распространённый косвенный способ построения ф. п. – *метод парных сравнений*.



Косвенные методы построения функции принадлежности

Результатом опроса эксперта при данном методе является матрица:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, i, j = \overline{1..n},$$

где n – число точек, в которых сравниваются значения ф. п. При этом эксперт оперирует понятиями, представленными по так называемой *9-балльной шкале Саати*:



Косвенные методы построения функции принадлежности

Смысл сравнения (элемента матрицы)	A_{ij}
Отсутствие преимущества $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	1
Слабое преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	3
Существенное преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	5
Явное преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	7
Абсолютное преимущество $\mu(x_i)$ над $\mu(x_j)$	9
Промежуточные сравнительные оценки (применяются в компромиссном случае)	2, 4, 6, 8
Обратные величины (например, если при сравнении элементов получили 4, при обратном сравнении будет $\frac{1}{4}$)	$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots$



Косвенные методы построения функции принадлежности

Таким образом,

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \left(\frac{w_i}{w_j} \right)_{n \times n},$$

то есть каждый элемент матрицы представляет собой отношение весов рассматриваемых объектов.



Косвенные методы построения функции принадлежности

Свойства полностью согласованной матрицы попарных сравнений

- 1) Все элементы матрицы положительны;
- 2) Матрица обратна симметрична, т.е. $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$;
- 3) Все элементы главной диагонали равны единице: $a_{ii} = 1$;
- 4) Свойство *транзитивности*, или согласованности:

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj} = \frac{w_i w_k}{w_k w_j} = \frac{w_i}{w_j} = a_{ij};$$

- 5) Число n является максимальным собственным значением матрицы, а вектор-столбец $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ – единственным (если он нормирован) соответствующим правым собственным вектором, т.е.

$$\exists! n: Aw = nw.$$



Косвенные методы построения функции принадлежности

Замечание: Вообще, у матрицы A лишь два собственных значения – 0 и n . Однако если матрица не транзитивна, то максимальное собственное число будет $\geq n$.

Если мы построим матрицу попарных сравнений, значения ф.п. будут определяться следующим образом:

$$\mu_A(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}.$$



Косвенные методы построения функции принадлежности

Зная лишь одну строку (столбец) матрицы, можно вычислить все остальные элементы матрицы.

Иными словами, если известны элементы a_{kj} , то произвольный элемент можно найти как:

$$a_{ij} = \frac{a_{kj}}{a_{ki}}$$

Например, зная элементы первой строки, вычислим:

$$a_{21} = \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{1}{a_{12}} = 7; a_{23} = \frac{a_{13}}{a_{12}} = \frac{1}{5} : \frac{1}{7} = 1,4.$$

При таком подходе к построению матрицы транзитивность выполняется.



Косвенные методы построения функции принадлежности

Пример.

Построить для 3-х любых дисциплин матрицу попарных сравнений относительно нечёткого понятия «противная дисциплина», оценивая значения по шкале Саати.



Косвенные методы построения функции принадлежности

Дисциплина	Бухучёт	ИРФМ	ЭБ
Бухгалтерский учёт	1	1/7	1/5
ИРФМ	7	1	1/4
Экономическая безопасность	5	4	1

Матрица попарных сравнений имеет вид: $A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0,143 & 0,2 \\ 7 & 1 & 0,25 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда:

$$\mu_A(\text{Бухучёт}) = \frac{1 + 1/7 + 1/5}{1 + 7 + 5 + \dots + 1} = \frac{1,34}{19,59} = 0,068;$$

$$\mu_A(\text{ИРФМ}) = \frac{7 + 1 + 1/4}{1 + 7 + 5 + \dots + 1} = \frac{8,25}{19,59} = 0,42;$$

$$\mu_A(\text{ЭкБез}) = \frac{5 + 4 + 1}{1 + 7 + 5 + \dots + 1} = \frac{10}{19,59} = 0,51.$$



Косвенные методы построения функции принадлежности

Заметим, что задача поставлена так, что $\sum \mu_A = 1$.

Также заметим, что свойство транзитивности матрицы оказалось не выполнено: отношение функций принадлежности для элементов не равно числу, стоящему на пересечении элементов в матрице попарных сравнений!



Косвенные методы построения функции принадлежности

Дисциплина	Бухучёт	ИРФМ	ЭБ
Бухгалтерский учёт	1	1/7	1/5
ИРФМ	7	1	1,4
Экономическая безопасность	5	0,71	1

$$\mu_A(\text{Бухучёт}) = \frac{1 + 1/7 + 1/5}{1 + 7 + 5 + \dots + 1} = \frac{1,34}{17,45} = 0,0769;$$

$$\mu_A(\text{ИРФМ}) = \frac{7 + 1 + 1,4}{1 + 7 + 5 + \dots + 1} = \frac{9,4}{17,45} = 0,538 \approx \frac{1}{7} \mu_A(\text{Бухучёт});$$

$$\mu_A(\text{ЭкБез}) = \frac{5 + 0,71 + 1}{1 + 7 + 5 + \dots + 1} = \frac{6,714}{17,45} = 0,384 \approx \frac{1}{5} \mu_A(\text{Бухучёт}).$$

Теперь отношение функций принадлежности равно тому числу, которое стоит в матрице напротив сравниваемых элементов.



Косвенные методы построения функции принадлежности

Таким образом, при построении матрицы попарных сравнений «транзитивно мыслящее» лицо, принимающее решение, для построения полностью согласованной матрицы должно эмпирически задать, например, **только первую строку** матрицы, а остальные элементы вычислить аналитически, используя обратную симметричность и транзитивность матрицы.