



ИФТЭБ *НИЯУ*
МЭФ
ИНСТИТУТ ФИНАНСОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Математические методы в задачах финансового мониторинга

1. Введение в нечёткую логику и нечёткие множества

Москва 2023



- Введение
- Методы построения функций принадлежности
- Типовые кривые функции принадлежности
- Групповые прямые методы
- Терминология нечётких множеств
- Логические операции над нечёткими множествами
- Геометрическое представление нечётких множеств
- Свойства логических операций
- Алгебраические операции над нечёткими множествами
- Свойства алгебраических операций
- Нечёткие операторы



Математическая теория нечётких множеств позволяет описывать нечёткие понятия и знания, оперировать этими знаниями и делать нечёткие выводы.

Чёткая (булевая, бинарная) логика оперирует чёткими понятиями: ДА и НЕТ, 0 и 1, Истина и Ложь.

В *нечёткой* же логике фигурируют значения, заданные в некотором непрерывном диапазоне, как правило, $[0;1]$.



Пусть U – это так называемое *универсальное множество*, из элементов которого состоят все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач. Один из способов задания множества – с помощью характеристической функции.

Характеристическая функция (функция принадлежности) (х.ф.) множества A – это функция μ_A , значения которой показывают, принадлежит ли элемент x множеству.

В чёткой логике $\mu_A(x)$ выглядит так:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

В нечёткой же логика эта функция принимает значения из диапазона от 0 до 1. Устанавливается «степень принадлежности» элемента данному множеству.



Нечёткая логика предлагает аппарат для описания реальных ситуаций окружающего мира. Сначала описывается какое-либо качественное понятие, например, «большой», «умный», «популярный», с помощью некоторой функции принадлежности. Далее это понятие используют как точное. В теории нечёткой логики вводятся операции над функциями принадлежности.

Доказана Теорема Нечёткой Аппроксимации, говорящая о том, что для любой математической модели (действительной функции) можно построить аналог, основанный на нечёткой логике и нечётких множествах.



Достоинства нечеткой логики:

- описание условий и методов решения задачи происходит на языке, близком к естественному;
- универсальность и эффективность представления.

Недостатки нечеткой логики :

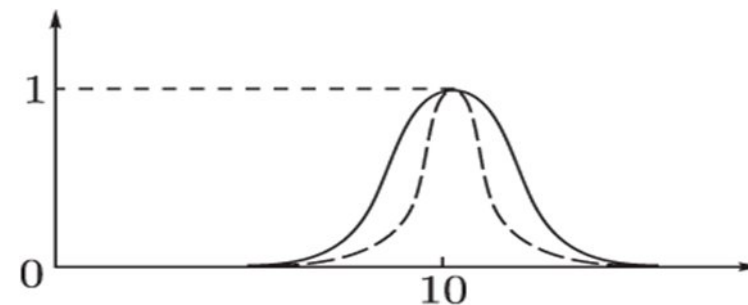
- моделирование проводится лицом, принимающим решение (ЛПР), человеком, или коллективом, исходя из их видения ситуации, т.е. оно субъективно и может оказаться неполным или противоречивым;
- вид и параметры функции принадлежности, описывающей входные и выходные переменные системы, опять же выбираются человеком.



Нечёткое множество A в универсуме U – это совокупность пар вида $(u, \mu_A(u))$, $u \in U$, где $\mu_A(u)$ – функция принадлежности нечёткого множества A : $U \rightarrow [0;1]$.

Примеры записи:

1. $U = (a, b, c, d, e, f)$, то $A = (0/a, 1/b, 0.5/c, \dots)$;
2. $U = \{a, b, c, d, e\}$; $A = \{\{a, 0\}, \{b, 0.1\}, \{c, 0.5\}, \{d, 0.9\}, \{e, 1\}\}$;
3. $U = R$; $\mu_A(x) = (1 + |x-10|^m)^{-1}$.





Пример :

Пусть $U = [0;100]$ и u – переменная, принимающая значения из этого интервала, которая интерпретируется как «Возраст».

Можно определить нечёткое множество «Молодой» с помощью функции принадлежности:

$$\mu_{\text{Молодой}}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u \leq 25, \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2}, & 25 \leq u \leq 100 \end{cases}$$

Нечёткое множество «Молодой» на универсуме $U' = \{\text{Иванов, Петров, Сидоров, ...}\}$ задаётся с помощью функции $\mu_{\text{Молодой}}(u)$ на множестве $U = [0;100]$, называемой по отношению к U' функцией совместимости, при этом:

$$\mu_{\text{Молодой}}(\text{Петров}) = \mu_{\text{Молодой}}(u),$$

где u – возраст Петрова.



Методы делятся на прямые и косвенные.

При *прямом* методе эксперт самостоятельно задаёт функцию принадлежности. Используется для измеримых понятий: рост, время, скорость и т. п.

При *косвенном* методе характеристики выделяются исходя из попарных сравнений объектов.



Типы шкал:

Название	Пояснение	Примеры	Разрешаемые операции
номинальная	шкала категорий, в которой почти невозможно оценить соотношение объектов	семейное положение, страна проживания и т. п.	равно (==) неравно (!=)
порядковая	шкала, в которой объекты упорядочены по какому-л. признаку, но этот порядок не говорит о величине различий признака между этими объектами. Не имеет смысла вопрос «насколько одна величина больше другой», несмотря на упорядоченность	шкала образования (высшее, среднее, дошкольное и др.)	равно неравно больше (>) меньше (<)



Название	Пояснение	Примеры	Разрешаемые операции
интервальная	шкала, в которой разности значений между признаками могут быть вычислены, но не имеют смысла их отношения, т. к. данные представлены в виде интервалов	шкала возраста (от 20 до 25 л., от 40 до 45 л. и др.)	... сложение (+) вычитание (-)
относительная	шкала количественных признаков, для которых имеет смысл как отношение, так и разность	шкала точного возраста, точного веса, дохода и т. п.	... умножение (*) деление (:)
дихотомическая	частный случай номинальной шкалы с лишь двумя значениями		



При проведении экспертиз важным условием успеха является возможность *формализовать* информацию, не поддающуюся количественному измерению, так, чтобы помочь принимающему решение выбрать из множества действий одно.

Поэтому в вопросах, связанных с теорией измерений, основное место отводится понятию шкалы измерения.

В зависимости от того, по какой шкале идет измерение, экспертные оценки содержат больший или меньший объем информации и обладают различной способностью к математической формализации.

Данные, с помощью которых мы можем измерить признаки, могут находиться в разных ***шкалах***. Чтобы задать функцию принадлежности, нужно сначала определить, в какой шкале измеряется наш признак.



При *прямом методе* эксперт непосредственно задаёт функцию принадлежности.

Используются, как правило, для понятий, измеренных в относительной шкале, таких как скорость, время, давление, температура и т.д.



При *прямом методе* эксперт непосредственно задаёт правила определения функции принадлежности.

Для принятия решения лицо, принимающее решение (ЛПР), должно отразить свои предпочтения в этой функции:

$\forall u_1, u_2 \in U, \mu_A(u_1) < \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_2 предпочтительнее u_1 , т.е. в большей степени характеризуется понятием A .

Если $\mu_A(u_1) = \mu_A(u_2)$, то u_1 и u_2 безразличны для ЛПР относительно понятия A .



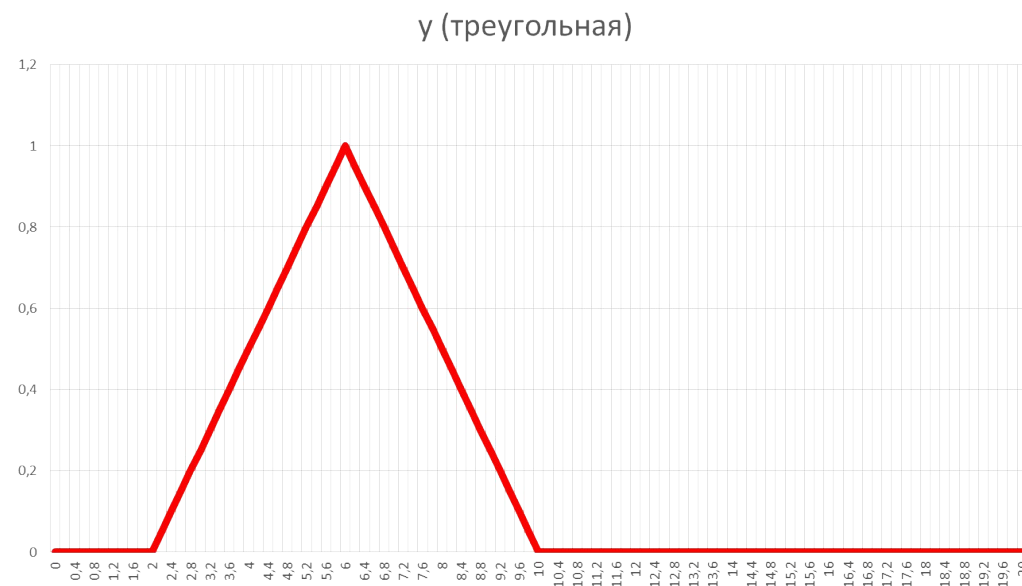
1. Треугольная:

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, b \leq x \leq c \\ 0, x > c \end{cases}$$



1. Треугольная:

$$f(x, a, b, c) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases}$$





2. Трапециевидная:

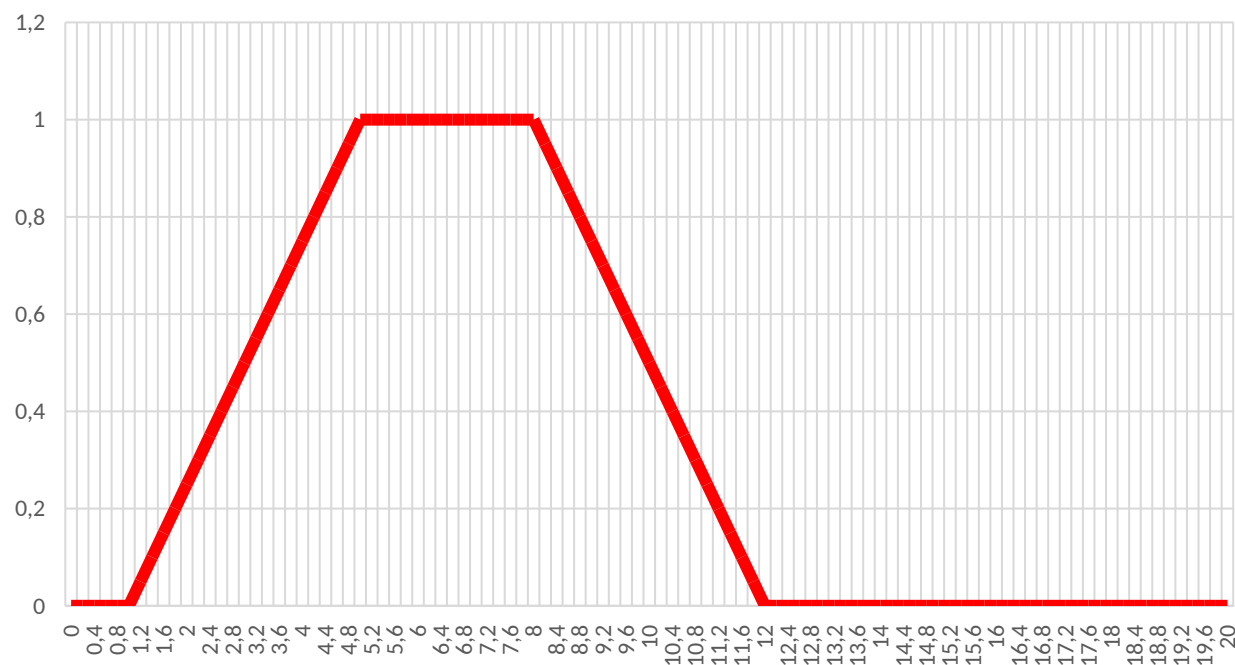
$$f(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 1, b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, c < x \leq d \\ 0, x > d \end{cases}$$



2. Трапециевидная:

$$f(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & b < x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases}$$

у (трапециевидная)





3. Гауссова:

$$f(x, \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

Похожа на функцию плотности нормального распределения, но отнормирована так, что её максимум равен 1.

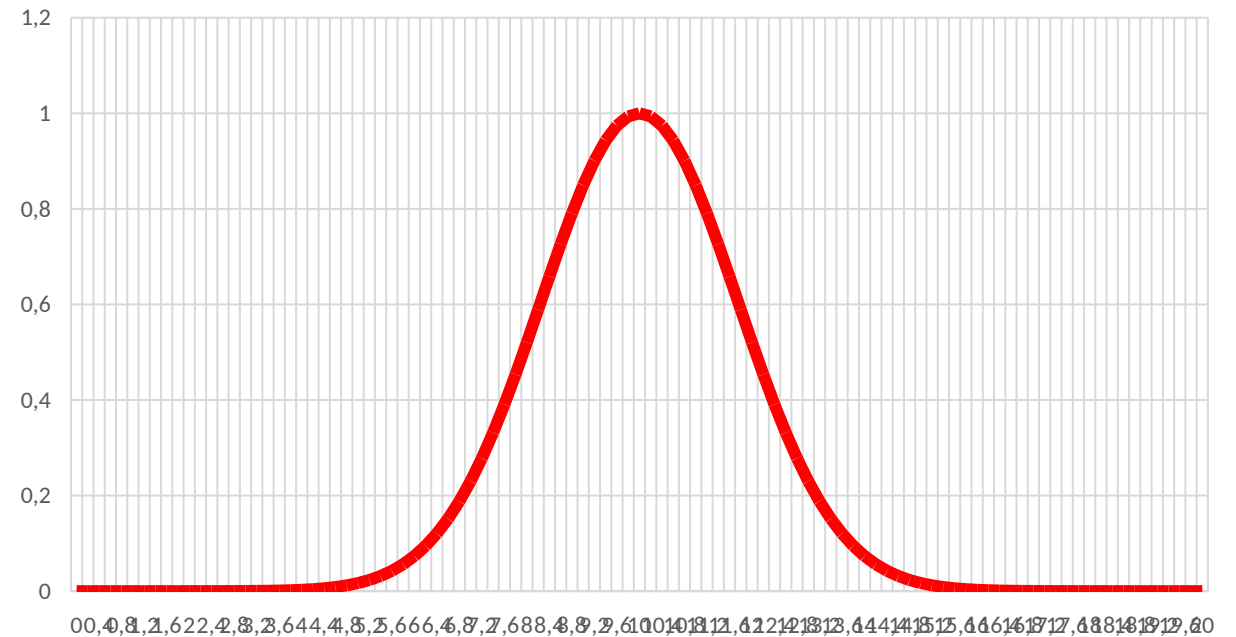


3. Гауссова:

$$f(x, \sigma, c) = e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

Похожа на функцию плотности нормального распределения, но отнормирована так, что её максимум равен 1.

у (Гауссова)





4. «Обобщенный колокол»:

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}$$

Имеет горизонтальную
асимптоту $y = 0$.

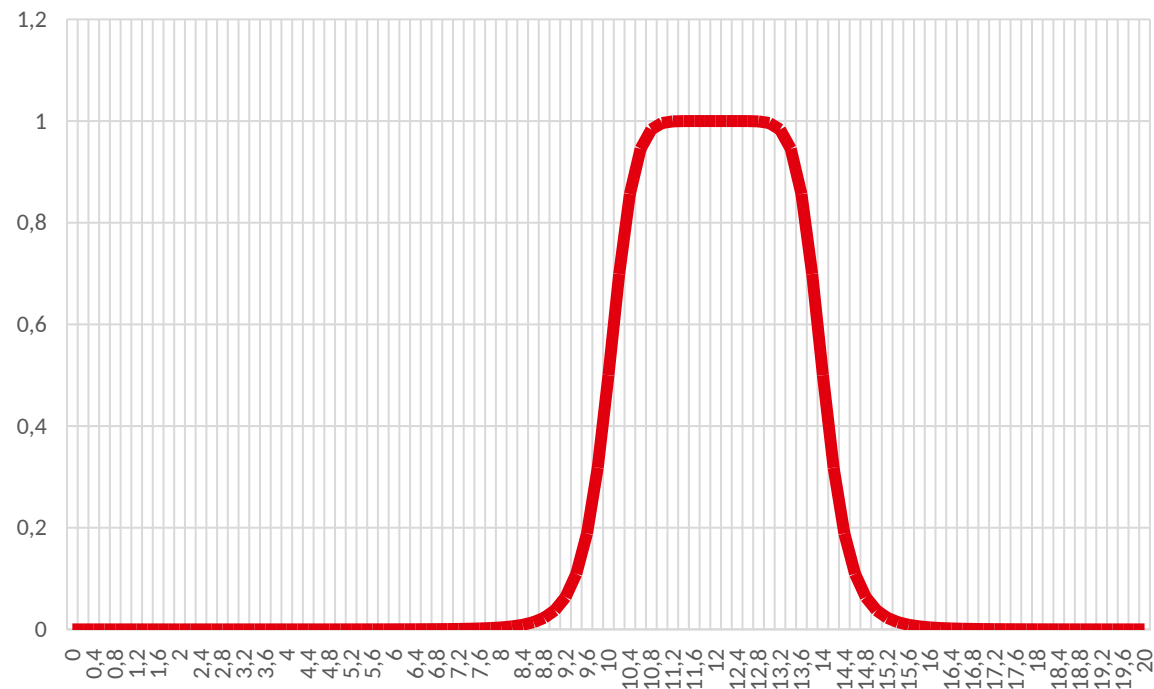


4. «Обобщенный колокол»:

$$f(x, a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}$$

Имеет горизонтальную
асимптоту $y = 0$.

у (обобщённый колокол)





5. Сигмоидная (логистическая):

$$f(x, a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

Имеет точку перегиба
(где $y = 0.5$ меняется
выпуклость функции)

$y = 0.5$.

Имеет горизонтальные
асимптоты $y = 0$, $y = 1$.



5. Сигмоидная (логистическая):

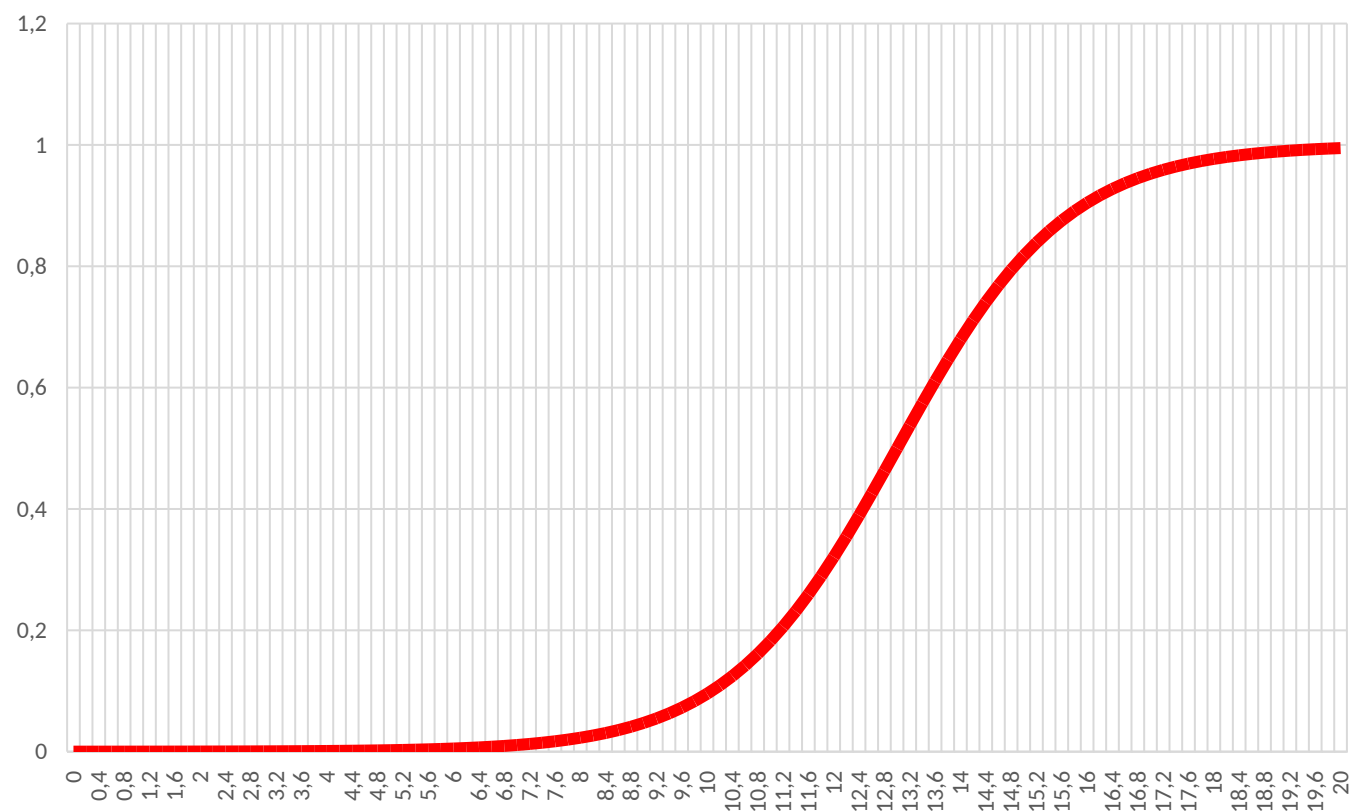
$$f(x, a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$

Имеет точку перегиба
(где меняется
выпуклость функции)

$y = 0.5$.

Имеет горизонтальные
асимптоты $y = 0$, $y = 1$.

у (сигмоид-логистическая)





6. S-функция:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{x-c}{c-a} \pi \right) \right), & a < x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

Сплайн-интерполяция этой функции:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & a < x < b \\ 1 - 2 \left(\frac{c-x}{c-a} \right)^2, & b \leq x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}, \text{ где } b = \frac{a+c}{2}$$

По сути, между двумя последними функциями есть связь вида: $f_z + f_s = 1$.



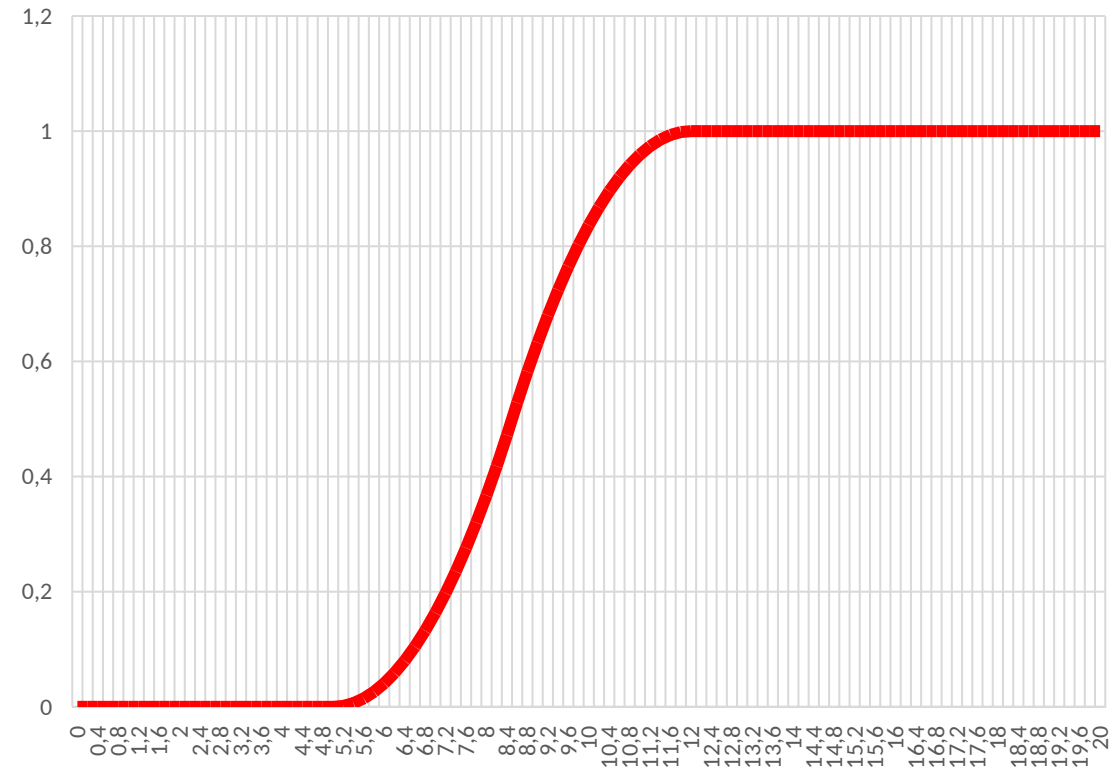
6. S-функция:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{x-c}{c-a} \pi \right) \right), & a < x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

Сплайн-интерполяция этой функции:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & a < x < b \\ 1 - 2 \left(\frac{c-x}{c-a} \right)^2, & b \leq x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}, \text{ где } b = \frac{a+c}{2}$$

у (S-функция)





7. Z-функция:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{x-a}{c-a} \pi \right) \right), & a < x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$$

Используется чаще всего сплайн-интерполяция этой функции:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & a < x < b \\ 2 \left(\frac{c-x}{c-a} \right)^2, & b \leq x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}, \text{ где } b = \frac{a+c}{2}$$

По сути, между двумя последними функциями есть связь вида: $f_z + f_s = 1$.



7. Z-функция:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{x-a}{c-a} \pi \right) \right), & a < x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}$$

Используется чаще всего *сплайн-интерполяция* этой функции:

$$f(x, a, c) = \begin{cases} 1, & x \leq a \\ 1 - 2 \left(\frac{x-a}{c-a} \right)^2, & a < x < b \\ 2 \left(\frac{c-x}{c-a} \right)^2, & b \leq x < c \\ 0, & x \geq c \end{cases}, \text{ где } b = \frac{a+c}{2}$$

По сути, между двумя последними функциями есть связь вида: $f_z + f_s = 1$.

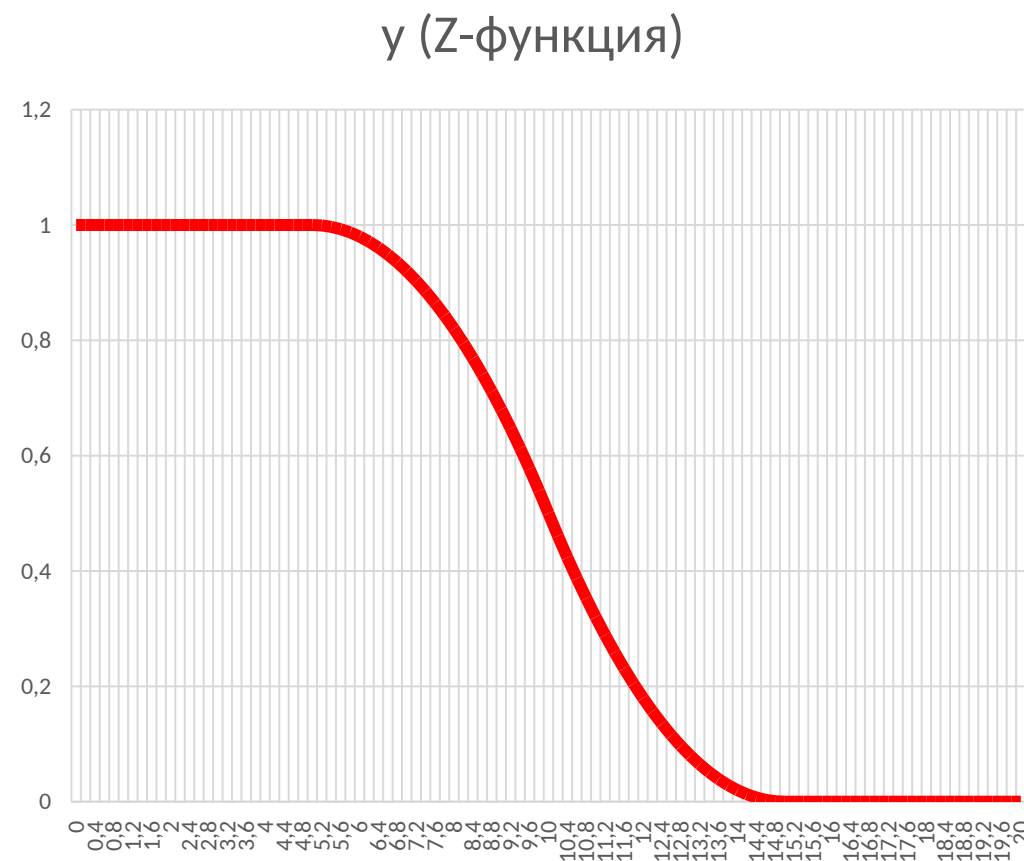




График	Функция
Функции степеней принадлежности утверждения "величина $ x $ малая"	
	$\mu(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -a \\ 1, & -a \leq x \leq a \\ 0, & a < x < \infty \end{cases}$
	$K > 1$ $\mu(x) = \begin{cases} e^{Kx}, & -\infty < x \leq 0 \\ e^{-Kx}, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \leq -a_2 \\ \frac{a_2 + x}{a_2 - a_1}, & -a_2 \leq x \leq -a_1 \\ 1, & -a_1 \leq x \leq a_1 \\ \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1}, & a_1 \leq x < \infty \end{cases}$

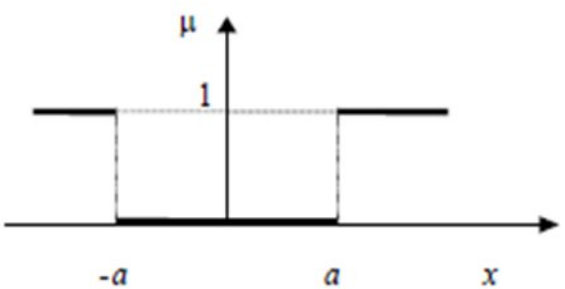
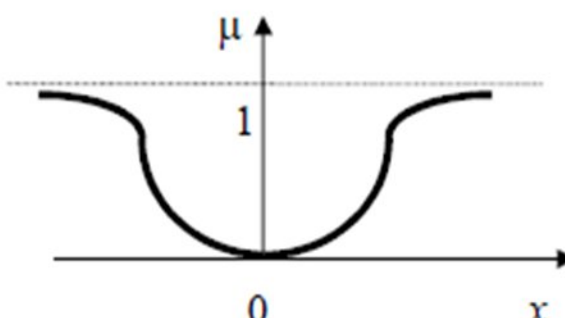


График	Функция
Функции степеней принадлежности утверждения "величина $ x $ малая"	
	$\mu(x) = \frac{1}{1 + kx^2}; k > 1$
	$\mu(x) = \begin{cases} 0; -\infty < x \leq -b \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x + \frac{a+b}{2}); & -b \leq x \leq -a \\ 1; -a \leq x \leq a \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x - \frac{a+b}{2}); & a \leq x \leq b \\ 0; b \leq x < \infty \end{cases}$



График	Функция
Функции степеней принадлежности утверждения "величина $ x $ большая"	
	$k > 1$ $\mu(x) = \begin{cases} 1 - e^{kx}; & -\infty < x \leq 0 \\ 1 - e^{-kx}; & 0 \leq x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1; & -\infty < x < -a_2 \\ -\frac{x+a_1}{a_2-a_1}; & -a_2 \leq x \leq -a_1 \\ 0; & -a_1 \leq x \leq a_1 \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1}; & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1; & a_2 \leq x < \infty \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1; & -\infty < x \leq -b \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x + \frac{a+b}{2}); & -b \leq x \leq -a \\ 0; & -a \leq x \leq a \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{b-a} (x - \frac{a+b}{2}); & a \leq x \leq b \\ 1; & b \leq x < \infty \end{cases}$



График	Функция
Функции степеней принадлежности утверждения "величина $ x $ большая"	
	$\mu(x) = \begin{cases} 1; -\infty \leq x < -a \\ 0; -a \leq x \leq a \\ 1; a < x \leq \infty \end{cases}$
	$k > 1$ $\mu(x) = \frac{kx^2}{1 + kx^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{kx^2}}$



Иногда можно использовать групповые методы, а так же строить **многомерную функцию принадлежности**.

Если набор нечётких множеств $A_i, i = 1..n$ в U соответствует n различным свойствам рассматриваемого объекта, каждый элемент U характеризуется вектором значений $(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x))$, выражающим степень соответствует этим свойствам.

Таким образом, строится функция $\mu: U \rightarrow [0,1]^n$.



Пример. Идентификация человека по чертам лица

X1	Высота лба	Низкий – широкий
X2	Профиль носа	Горбатый – курносый
X3	Длина носа	Короткий – длинный
X4	Разрез глаз	Узкие – широкие
X5	Цвет глаз	Тёмные – светлые
X6	Форма подбородка	Остроконечный – квадратный
X7	Толщина губ	Тонкие – толстые
X8	Цвет лица	Смуглое – светлое
X9	Очертание лица	Овальное – квадратное



Группе экспертов предъявляют задание по заданию множества.

Каждый должен дать один из полярных ответов: 0 или 1. Количество положительных ответов, делённое на общее число экспертов, даст усреднённое значение функции принадлежности для конкретного объекта.

По поводу, например, лба конкретного человека проводим опрос.

Считаем среднее значение – это будет значение функции принадлежности. Например, если 58 человек спросить, какой у конкретного человека лоб, и 17 ответит «низкий», а остальные – «широкий», то значение функции принадлежности будет:

$$\mu_{\text{Лоб Широкий}}(\text{Человек}) = \frac{41}{58}.$$



Пусть A и B – нечёткие множества какого-либо универсума U .

Нечёткое множество A называется *пустым*, если

$$\mu_A(u) = 0 \quad \forall u \in U.$$

Носителем нечёткого множества A называется подмножество таких точек U , для которых величина функции принадлежности положительна:

$$S(A) = \text{Supp}(A) = \{u | u \in U, \mu_A(u) > 0\}.$$



Высотой множества A называется максимальное значение х.ф.:

$$h(A) = \sup \mu_A(u)$$

Множество A называется *нормальным*, если его высота равна 1. В противном случае оно называется *субнормальным*. Любое субнормальное множество можно сделать нормальным.

Элементы множества U , для которых $\mu_A(u) = 0,5$, являются *точками перехода* нечёткого множества A .

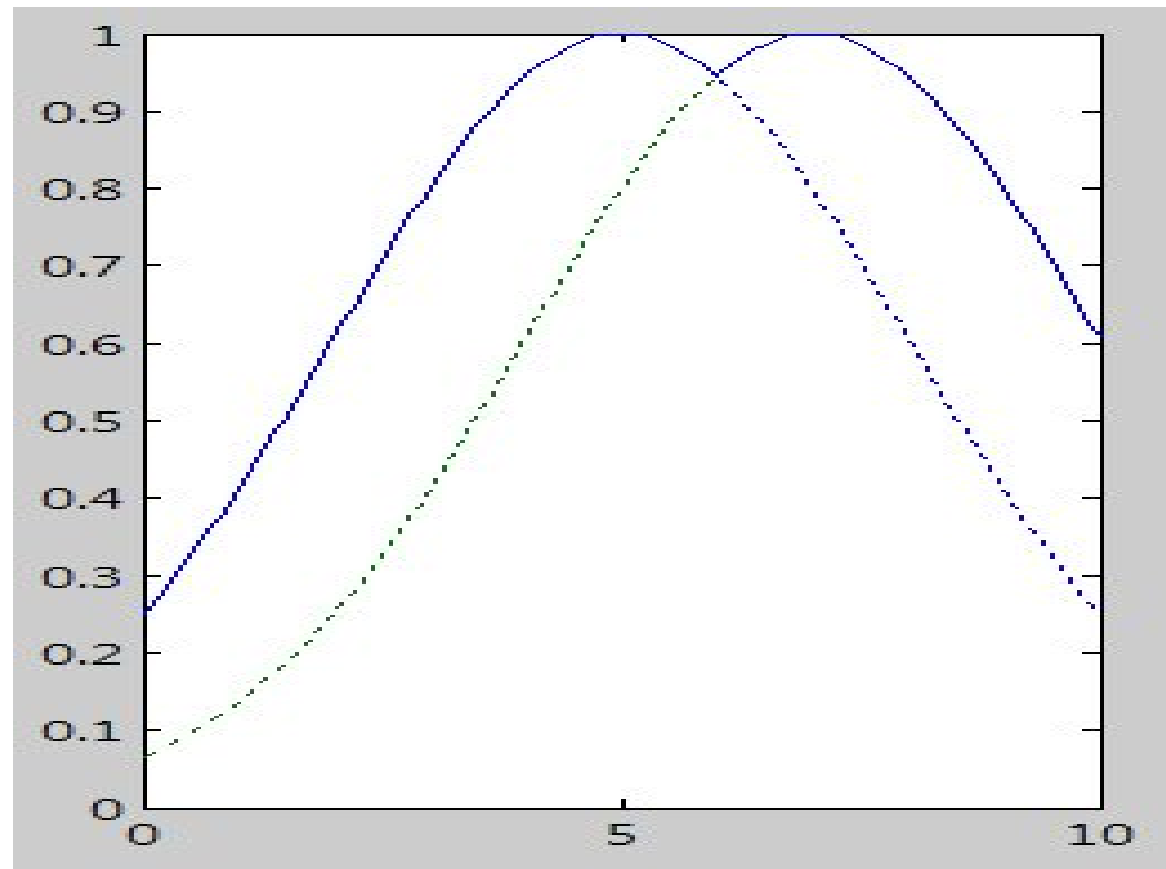


Объединением (дизъюнкцией) нечётких множеств называют наименьшее подмножество $A \cup B$, включающее как A , так и B , с функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A \cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)), u \in U.$$

Если график нечёткой функции является кривой, то множеством является всё то, что находится под этой кривой.

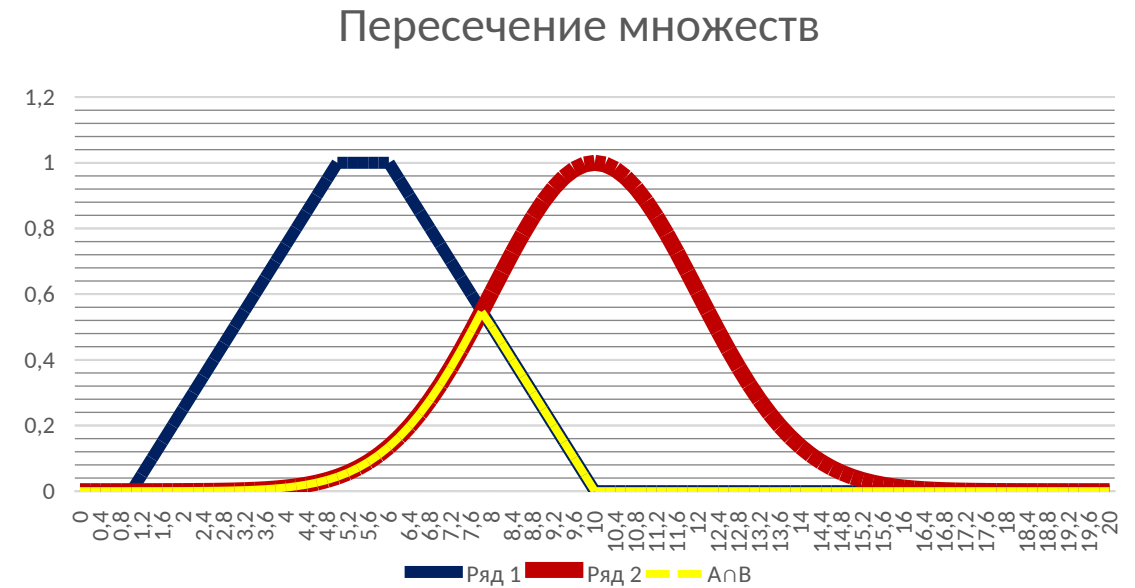
Универсумом на плоскости является полоса, ограниченная прямыми $y = 0$ и $y = 1$.





Пересечением (конъюнкцией) нечётких множеств называют наибольшее подмножество $A \cap B$, содержащееся одновременно и в A , и в B , с функцией принадлежности вида:

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)), u \in U.$$





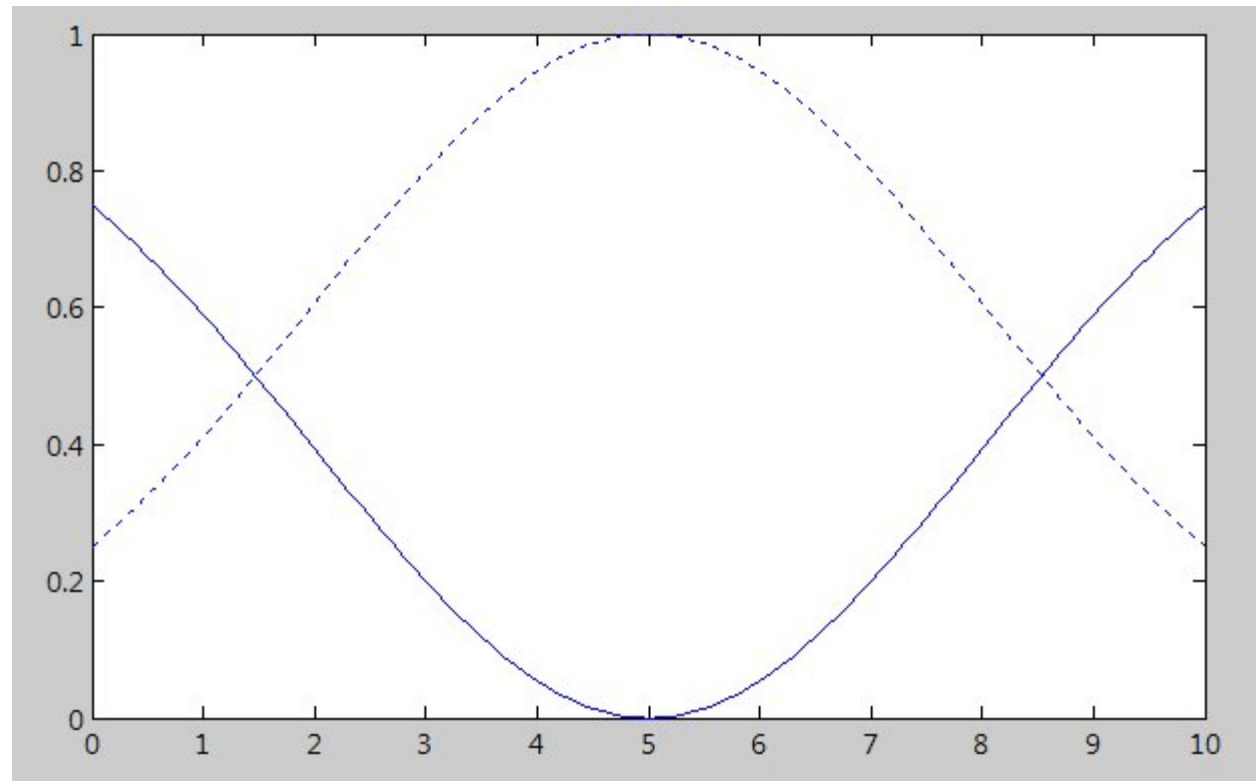
Дополнением
(отрицанием) нечёткого
множества A называют
нечёткое множество $\bar{A}$ с
функцией принадлежности:

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u), u \in U.$$



Дополнением
(отрицанием) нечёткого
множества A называют
нечёткое множество $\bar{A}$ с
функцией принадлежности:

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u), u \in U.$$





Разностью двух множеств называется множество $A - B = A \cap \bar{B}$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(u) = \mu_{A \cap \bar{B}}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_{\bar{B}}(u)) = \min(\mu_A(u), 1 - \mu_B(u)).$$

Дизъюнктивной суммой множеств называется множество

$A \oplus B = ((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap \bar{B}))$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A \oplus B}(u) = \max[\min(\mu_A(u), 1 - \mu_B(u)); \min(1 - \mu_A(u), \mu_B(u))].$$



Пример

Пусть

$$A = 0,4u_1 + 0,2u_2 + 0u_3 + 1u_4;$$

$$B = 0,7u_1 + 0,9u_2 + 0,1u_3 + 1u_4;$$

$$C = 0,1u_1 + 1u_2 + 0,2u_3 + 0,9u_4.$$

Требуется вычислить функции принадлежности для множеств:

$$A \cup B, B \cap C, \bar{A}, \bar{B}, A - B, A \oplus B.$$



$$A \cup B = 0,7u_1 + 0,9u_2 + 0,1u_3 + 1u_4 = B,$$

следовательно A является подмножеством B ;

$$B \cap C = 0,1u_1 + 0,9u_2 + 0,1u_3 + 0,9u_4;$$

$$\overline{A} = 0,6u_1 + 0,8u_2 + 1u_3 + 0u_4;$$

$$\overline{B} = 0,3u_1 + 0,1u_2 + 0,9u_3 + 0u_4;$$

$$A - B = 0,3u_1 + 0,1u_2 + 0u_3 + 0u_4;$$

$$A \oplus B = 0,6u_1 + 0,8u_2 + 0,1u_3 + 0u_4.$$



Для операций конъюнкции и дизъюнкции выполняются свойства:

- коммутативности: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$;
- ассоциативности: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- идемпотентности: $A \cup A = A, A \cap A = A$;



- дистрибутивности:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

- инволюция: $\overline{\overline{A}} = A;$

- законы де Моргана:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B};$$

Имеют место: $A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup \emptyset = A;$

$$A \cap U = A; A \cup U = U.$$



НЕ выполняются свойства:

$$A \cup \overline{A} = U;$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset.$$

Показать это можно
геометрически.

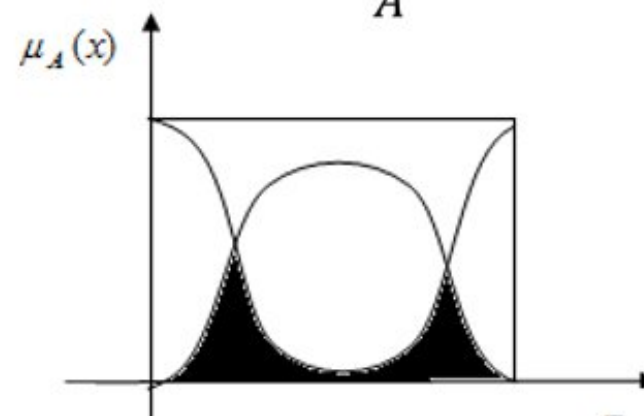
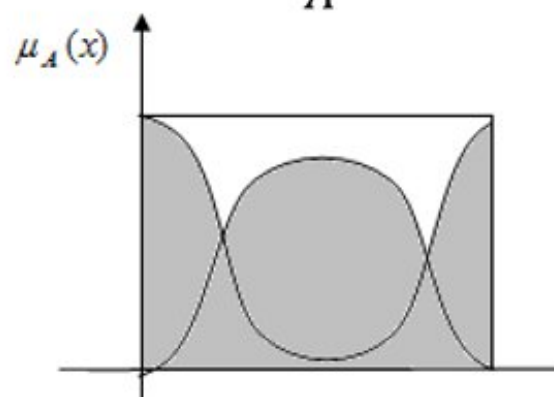
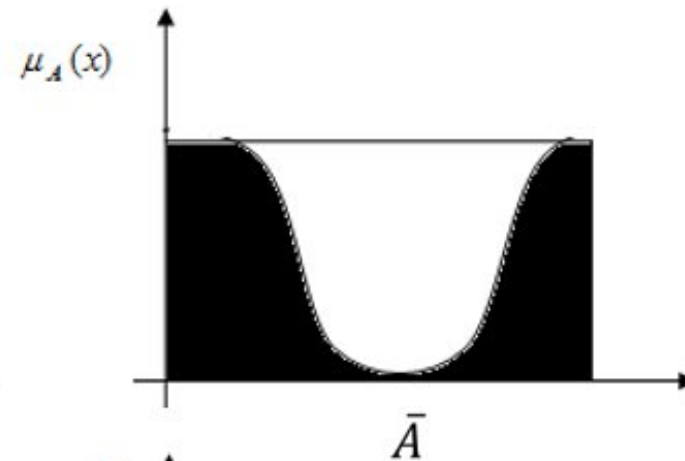
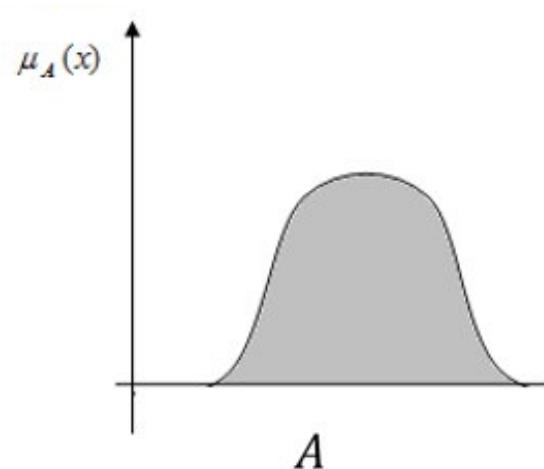


НЕ выполняются свойства:

$$A \cup \bar{A} = U;$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

Показать это можно
геометрически.





Важно понимать, что таких операций не существует в теории «чётких» множеств!

Алгебраическим произведением двух множеств называется множество $A \cdot B$, функция принадлежности которого имеет вид:

$$\mu_{A \cdot B}(u) = \mu_A(u) \mu_B(u).$$

Алгебраической суммой множеств называют множество $A + B$, функция принадлежности которого имеет вид:

$$\mu_{A+B}(u) = \mu_A(u) + \mu_B(u) - \mu_A(u) \mu_B(u).$$



Степенью нечёткого множества называется множество A^α с ф. п. вида:

$$\mu_{A^\alpha}(u) = \mu_A^\alpha(u)$$

При $\alpha = 2$ получаем операцию *концентрирования* (CON):

$$CON(A) = A^2.$$

При $\alpha = 0,5$ получаем операцию *растяжения* (DIL):

$$DIL(A) = A^{\frac{1}{2}}.$$

Эти операции соответственно снижают и увеличивают степень нечёткости множества.



Умножение множества на число. Пусть α – такое положительное число, которое при умножении на ф. п. не даст значение, большее 1. Тогда:

$$\alpha: \alpha \max(\mu_A(u)) \leq 1 \rightarrow \mu_{\alpha A}(u) = \alpha \mu_A(u).$$

Выпуклой комбинацией нечётких множеств называется множество A с ф. п.:

$$\mu_A(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_{A_i}(u), \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1.$$



Декартовым (прямым) произведением нечётких множеств называется нечёткое подмножество декартового произведения универсумов $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ с функцией принадлежности вида:

$$\mu_A(u) = \{\mu_{A_1}(u_1), \dots, \mu_{(A_n)}(u_n)\}.$$



Для операций сложения и умножения выполняются операции:

- коммутативности: $A \cdot B = B \cdot A, A + B = B + A$;

- ассоциативности:

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

$$A \cdot \emptyset = \emptyset, A \cdot U = A;$$

$$A + \emptyset = A, A + U = U.$$

- законы де Моргана.



НЕ выполняются свойства:

- идемпотентности;
- дистрибутивности:

$$A \cdot (B + C) \neq (A + B) \cdot (A + C);$$

$$A + (B \cdot C) \neq A \cdot B + A \cdot C.$$

- $A + \overline{A} \neq U;$
- $A \cdot \overline{A} \neq \emptyset.$



Можно сочетать логические и алгебраические операции над нечёткими множествами.

Имеют место следующие дистрибутивности:

$$A \cdot (B \cup C) = (A \cdot B) \cup (A \cdot C);$$

$$A \cdot (B \cap C) = (A \cdot B) \cap (A \cdot C);$$

$$A + (B \cup C) = (A + B) \cup (A + C);$$

$$A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C).$$



Оператор увеличения нечёткости используется для преобразование чёткого множества в нечёткое, либо для увеличения нечёткости множества.

Пусть на универсуме определены некоторые нечёткие множества $K(u)$.

Совокупность всех таких множеств называется *ядром* оператора Φ . Результатом действия Φ на нечёткое множество A является нечёткое множество вида:

$$\Phi(A, K) = \bigcup_u \mu_A(u) K(u).$$



Пример.

Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = 0,8/1 + 0,6/2 + 0/3 + 0/4$; тогда

$$K(1) = 1/1 + 0,4/2;$$

$$K(2) = 1/2 + 0,4/1 + 0,4/3;$$

$$K(3) = 1/3 + 0,5/4;$$

$$K(4) = 1/4.$$

$$\begin{aligned}\Phi(A, K) &= 0,8(1/1 + 0,4/2) \cup 0,6(1/2 + 0,4/1 + 0,4/3) \\ &= 0,8/1 + 0,6/2 + 0,24/3.\end{aligned}$$



В теории нечётких множеств ввести операции объединения, пересечения и отрицания можно различными способами.

Система таких функций в теории четких множеств является *полной*, потому что через эти операции можно определить любую другую операцию чёткой логики.

В системе нечёткой логики строятся т.н. **нечёткие**, или **обобщённые** операторы.

Примерами таких операторов являются *треугольные нормы и конормы*.



Треугольная норма (t-норма) – это двухместная действительная функция: $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, которая обладает свойствами:

- ограниченности: $T(0,0) = 0, T(\mu_A, 1) = T(1, \mu_A) = 1$;
- монотонности: $\mu_A < \mu_B, \mu_C < \mu_D \rightarrow T(\mu_A, \mu_B) < T(\mu_C, \mu_D)$;
- коммутативности: $T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$;
- ассоциативности: $T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C) = T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C))$.

Треугольная норма по сути – обобщение оператора конъюнкции.



Примеры треугольных норм:

- минимум функций принадлежности;
- алгебраическое произведение;
- *t-норма Лукасевича:*

$$T_{\max T}(\mu_A, \mu_B) = \max \{0, \mu_A + \mu_B - 1\}.$$



Треугольная конорма (t-конорма) – это двухместная действительная функция: $\perp : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, которая обладает свойствами:

- ограниченности: $\perp(1,1) = 1, T(\mu_A, 0) = T(0, \mu_A) = \mu_A$;
- МОНОТОННОСТИ: $\mu_A < \mu_B, \mu_C < \mu_D \rightarrow \perp(\mu_A, \mu_B) < \perp(\mu_C, \mu_D)$;
- КОММУТАТИВНОСТИ: $\perp(\mu_A, \mu_B) = \perp(\mu_B, \mu_A)$;
- ассоциативности: $\perp(\perp(\mu_A, \mu_B), \mu_C) = \perp(\mu_A, \perp(\mu_B, \mu_C))$.

Треугольная норма по сути – обобщение оператора дизъюнкции.



Примеры треугольных конорм:

- максимум функций принадлежности;
- алгебраическое сложение;
- *t-конорма Лукасевича:*

$$T_{\min T}(\mu_A, \mu_B) = \min \{1, \mu_A + \mu_B\}.$$



Согласно исследованиям, существенно различные результаты дают следующие пары операций:

- логика Заде (операции $\min$ и $\max$);
- вероятностная логика (алгебраическое сложение и произведение);
- логика Лукасевича (t -норма и t -конорма Лукасевича).

Все непрерывные нормы и конормы могут быть выражены в одной из этих логик.



Оператор отрицания – это оператор $\lambda: [0,1] \rightarrow [0,1]$, обладающий свойствами:

- $\lambda(0) = 1, \lambda(1) = 0$;
- $\mu_A < \mu_B \rightarrow \lambda(\mu_A) > \lambda(\mu_B)$.

Если помимо этого λ – строго убывающая и непрерывная функция, отрицание называется **строгим**. Если также выполняется соотношение:

$$\lambda(\lambda(\mu)) = \mu,$$

отрицание называется **сильным**, или **инволюцией**.

*Для любого непрерывного отрицания существует (и притом единственная) **равновесная точка**, т. е. такая, для которой $\lambda(\mu) = \mu$.*



Примеры оператора отрицания:

- классическое отрицание: $\lambda(\mu) = 1 - \mu$;
- квадратичное отрицание: $\lambda(\mu) = \sqrt{1 - \mu^2}$;
- отрицание Сугено: $\lambda(\mu) = \frac{1 - \mu}{1 + k\mu}, -1 < k < \infty$;
- дополнение порогового типа:

$$\lambda(\mu) = \begin{cases} 1, \mu \leq \alpha \\ 0, \mu > \alpha \end{cases}$$

(в качестве порога α обычно берётся 0,5).