



ИФТЭБ *НИЯУ*
МЭФ
ИНСТИТУТ ФИНАНСОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Математические методы в задачах финансового мониторинга

3. Нечеткие выводы



Лингвистическая и нечеткая переменная

- Целью введения нечеткого множества чаще всего является формализация нечетких понятий и отношений естественного языка (ЕЯ). Данную формализацию можно выполнить, воспользовавшись понятиями ***нечеткой и лингвистической переменных***.
- ***Лингвистическую переменную*** можно определить как переменную, значениями которой являются не числа, а слова или предложения естественного (или формального) языка.
- Поскольку слова в общем менее точны, чем числа, понятие ***лингвистической переменной*** дает возможность приближенно описывать явления, которые настолько сложны, что не поддаются описанию в общепринятых количественных терминах.



Лингвистическая и нечеткая переменная

Лингвистическая переменная – это обобщение нечёткой переменной. Её значениями являются не числа, а слова или предложения естественного или формального языка.

Переменная «возраст» является:

- **обычной**, если её значения равны 2, 3, 35, 70.5 и др.;
- **лингвистической**, если её значения равны «молодой», «очень молодой», «среднего возраста», «пожилой» и др.



Лингвистическая и нечеткая переменная

- Важный аспект понятия *лингвистической переменной* состоит в том, что эта переменная более высокого порядка, чем *нечеткая переменная*, в том смысле, что **значениями лингвистической переменной являются нечеткие переменные**.
- Например, значениями лингвистической переменной "ВОЗРАСТ" могут быть: "МОЛОДОЙ ", " НЕМОЛОДОЙ ", "СТАРЫЙ ", ОЧЕНЬ СТАРЫЙ ", " НЕ МОЛОДОЙ И НЕ СТАРЫЙ" и т.п.
- Каждое из этих значений является *названием нечеткой переменной*.



Нечёткой переменной называется кортеж вида $\langle X, U, \tilde{X} \rangle$,
где:

X – наименование нечёткой переменной,

$U = \{u\}$ – универсум, на котором она определяется,

$\tilde{X} = Y\mu_{\tilde{X}}(u)/u$ – нечёткое множество, описывающее ограничения на значения нечёткой переменной. Как правило, отождествляется с названием переменной.



Лингвистическая и нечеткая переменная

Лингвистической переменной называется кортеж вида $\langle \beta, T, U, G, M \rangle$, где

β – наименование переменной,

T – множество её значений (терм-множество), представляемое множеством наименований нечётких переменных, определённых на универсуме,

G – условная синтаксическая процедура, описывающая процесс образования из элементов множества T новых значений лингвистической переменной,

M – семантическая процедура, позволяющая превратить каждое новое значение лингвистической переменной (ЛП), образуемое процедурой G , в нечёткую переменную.



Лингвистическая и нечеткая переменная

Пример. Пусть определяется толщина выпускаемого изделия. Минимальная и максимальная толщина равны соответственно 10 и 80 мм. Мы оперируем понятиями «Малая толщина», «Средняя толщина» и «Большая толщина».

Формализовать это можно с помощью ЛП:

β – толщина изделия,

$T = \{\text{«Малая толщина»}, \text{«Средняя толщина»}, \text{«Большая толщина»}\},$

$U = [10; 80].$



Лингвистическая и нечеткая переменная

Для образования нового терма мы можем использовать логические связки (И, ИЛИ, НЕ) или модификаторы (лингвистические неопределённости) – «очень», «слегка» и др. Тогда:

M – семантическая процедура задания на U нечётких множеств

A_1 = «Малая толщина», A_2 = «Средняя толщина», A_3 = «Большая толщина», а также нечётких множеств для термов из $G(T)$.

Например, задав множество «Большая толщина» в виде трапециевидной функции принадлежности, множество «Очень большая толщина» может быть получено *операцией концентрирования*. Множество же «Малая или средняя толщина» будет задано *дизъюнкцией* двух исходных множеств.



Лингвистическая и нечеткая переменная

Пример 2. Пусть β – посадочная скорость самолета, тогда:

Скорость $:=$ (*скорость*, $<$ «малая», «небольшая», «средняя», «высокая» $>$, $[0..300]$, G , M), где

G – процедура перебора элементов базового термножества,

M – процедура экспертного опроса.



Лингвистическая и нечеткая переменная

Пример 3. Пусть $X = \text{«Температура в комнате»}$. Тогда:

$$U = [5; 35],$$

$T = \{\text{«ХОЛОДНО»}, \text{«КОМФОРТНО»}, \text{«ЖАРКО»}\}$ с функциями принадлежности:

$$u_{\text{холодно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u - 10}{7}\right)^{12}};$$

$$u_{\text{комфортно}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u - 20}{3}\right)^6};$$

$$u_{\text{жарко}}(u) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u - 30}{6}\right)^{10}}.$$



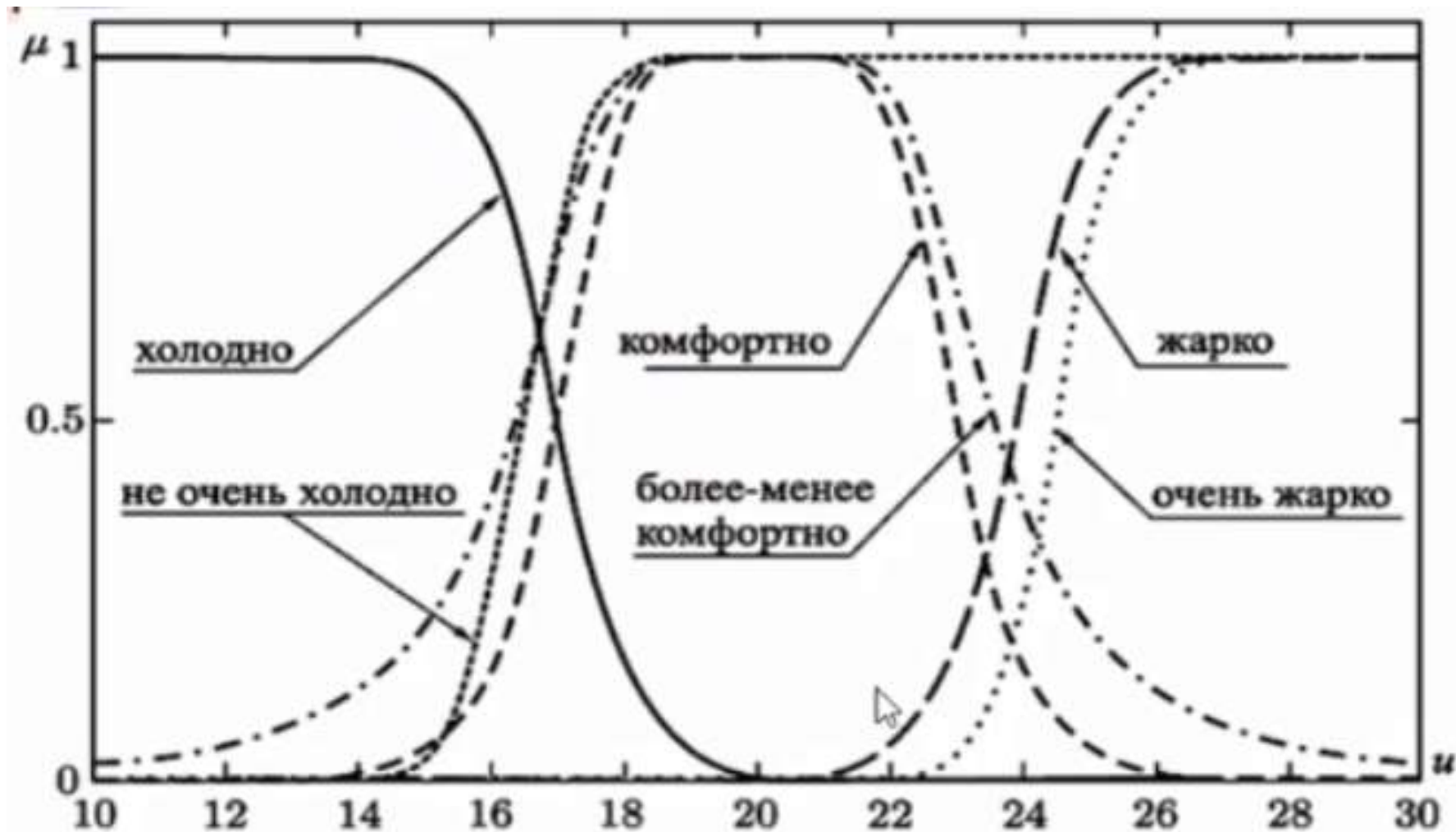
Лингвистическая и нечеткая переменная

Считается, что для семантических процедур M задаются следующие правила:

Квантификатор	Функция принадлежности
не t	$1 - \mu_t(u)$
очень t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее t	$\sqrt{\mu_t(u)}$
A и B	$\max(\mu_A(u), \mu_B(u))$
A или B	$\min(\mu_A(u), \mu_B(u))$



Лингвистическая и нечеткая переменная





Понятие импликации (воспоминания из дискретной математики)

Совершенно-дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) позволяет выразить любую операцию чёткой логики только с помощью операций объединения, пересечения и отрицания:

$$\text{СДНФ}(f) = \bigcup_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \cap \dots \cap x_n^{\sigma_n},$$

$$x_i^{\sigma_i} = \begin{cases} x_i, & \sigma_i = 1 \\ \bar{x}_i, & \sigma_i = 0 \end{cases}$$



Понятие импликации (воспоминания из дискретной математики)

Совершенно-конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) – аналогично:

$$\text{СКНФ}(f) = \bigcap_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n): f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0} x_1^{\sigma_1} \cup \dots \cup x_n^{\sigma_n}.$$

В нечётких множествах импликацию можно выразить, например, так:

$$A \rightarrow B = \bar{A} \cup B,$$
$$\mu_{A \rightarrow B} = \max\{1 - \mu_A, \mu_B\}.$$



Понятие импликации (воспоминания из дискретной математики)

В чёткой логике импликация задаётся таблицей значений:

A	B	$A \rightarrow B$	СДНФ	СКНФ
0	0	1	$\overline{x_1} \cap \overline{x_2}$	
0	1	1	$\overline{x_1} \cap x_2$	
1	0	0		$\overline{x_1} \cup x_2$
1	1	1	$x_1 \cap x_2$	



Понятие импликации

В нечётких множествах импликацию можно ввести, например, так

$$A \rightarrow B = \bar{A} \cup B,$$

$$\mu_{A \rightarrow B} = \max\{1 - \mu_A, \mu_B\}.$$

Это не единственное обобщение оператора импликации, и пользоваться мы будем не им.

Пользоваться будем:

- 1) импликацией Ларсона — произведением функций принадлежности;
- 2) импликацией Мамдани — минимумом функций.



Понятие импликации

В традиционной логике основным правилом вывода является правило *modus ponens*, которое позволяет по истинности высказываний A и $A \rightarrow B$ судить об истинности высказывания B .

Например, если A – высказывание «Джон в больнице», B – «Джон болен», то если верны высказывания «Джон в больнице» и «Если Джон в больнице, то он болен», то верно и высказывание «Джон болен».

Однако чаще всего т.р. используется в приближённой форме:

Если A истинно и $A^* \rightarrow B$ в приближении, то мы можем сделать вывод о том, что B приближённо истинно. В нечёткой логике решения принимаются на основе *композиционного правила вывода*.



Нечеткие выводы

Композиционное правило вывода

Пусть U, V – два универсума с базовыми переменными u, v соответственно.

Пусть A, F – нечёткие подмножества множеств $U, U \times V$, соответственно.

Тогда композиционное правило вывода утверждает, что из нечётких множеств A, F следует нечёткое множество $B = A \circ F$:

$$\mu_B(v) = \bigcup \mu_A(u) \cap \mu_F(u, v).$$

**Используется максиминная композиция, т. к. применили импликацию Мамдани, но вообще может использоваться любая композиция.*



Нечеткие выводы

Пример. Пусть $U = V = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \text{“Малый”} = \{(1/1), (0,6/2), (0,2/3), (0/4)\}$, $F = \text{“Примерно равны”}$.

F	1	2	3	4
1	1	0,5	0	0
2	0,5	1	0,5	0
3	0	0,5	1	0,5
4	0	0	0,5	1

Тогда получим:

$$B = (1 \ 0,6 \ 0,2 \ 0) \circ F = \dots \\ = (1 \ 0,6 \ 0,5 \ 0,2),$$

что можно интерпретировать как «Более-менее малый».



Нечеткие выводы

В общем случае нечёткая экспертная система — это совокупность «предпосылок» и выводов, им соответствующих:

$$L_i: \text{ЕСЛИ } (A_{i1} \dots A_{ik}), \text{ ТО } (B_{i1} \dots B_{ik})$$

Эта совокупность называется **нечёткой базой данных**.

С помощью операторов дизъюнкции и конъюнкции нечёткую систему можно привести к более простому виду:

$$L_i: \text{ЕСЛИ } A_i, \text{ ТО } B_i,$$

причём A_i — нечёткие множества, заданные на универсуме X множеств входных данных, B_i — нечёткие множества, заданные на универсуме Y множеств выходных данных.



Нечеткие выводы

Нечётким логическим выводом (fuzzy logic interference) называется аппроксимация зависимости $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ каждой выходной лингвистической переменной от входных и получение заключения в виде нечёткого множества с использованием нечёткой базы знаний и нечётких операций.

Основу нечёткого вывода составляет композиционное правило Заде и в общем случае оно реализуется **за 4 шага**.



Нечеткие выводы

- 1) «Фаззификация»** – определение степени истинности каждой предпосылки каждого правила. Для этого функции принадлежности, определённые на входных переменных, применяются к их фактическим значениям. Эта степень уверенности – ордината точки пересечения графика функции принадлежности и прямой $x = \text{четкое значение ЛП}$;
- 2) Непосредственно нечёткий вывод** – импликация. Вычисленное значение истинности для предпосылки каждого правила применяется к заключению каждого правила (обычно используются операции минимума или произведения);



Нечеткие выводы

- 3) Проведение композиции.** Все нечёткие множества, назначенные для каждого терма каждой входной ЛП, объединяются, и формируется единственное нечёткое множество – значение для каждой выходной ЛП. Обычно применяется оператор либо максимума, либо суммы;
- 4) «Дефаззификация».** Необязательный этап, проводится только если нам нужно преобразовать полученное нечёткое множество к чёткому.



Нечеткие выводы





Алгоритмы нечёткого логического вывода

1) Алгоритм Мамдани

Рассмотрим модуль нечёткого управления с базой правил:

R_1 : ЕСЛИ $(x_1 = A_1^1$ И $x_2 = A_1^1)$, ТО $(y = B^1)$;

R_2 : ЕСЛИ $(x_1 = A_1^2$ И $x_2 = A_2^2)$, ТО $(y = B^2)$.

Пусть на вход поступают конкретные значения $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$.

На первом этапе находятся степени истинности предпосылок каждого правила (нечётких множеств A). Далее вводится операция нечёткой импликации:

$$\begin{aligned}\mu_{R^k}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, y) &= \mu_{A_1^k \times A_2^k \rightarrow B^k}(\dots) = \min \left\{ \mu_{A_1^k \times A_2^k}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2), \mu_{B^k}(y) \right\} \\ &= \min \left\{ \min \left(\mu_{A_1^k}(\widetilde{x}_1), \mu_{A_2^k}(\widetilde{x}_2) \right), \mu_{B^k}(y) \right\}.\end{aligned}$$



Алгоритмы нечёткого логического вывода

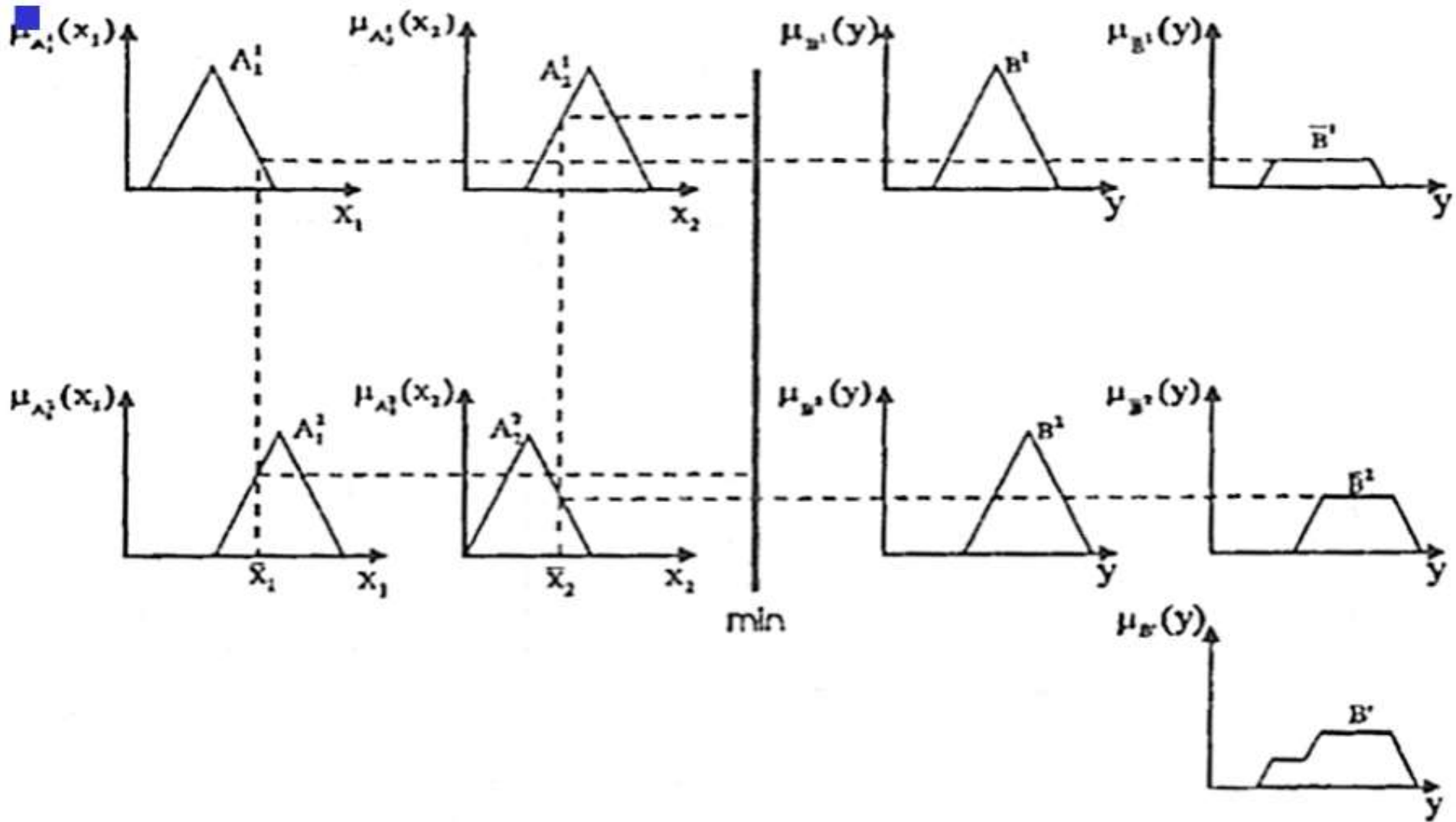
В результате **на этапе 2** происходит отсекаание функций принадлежности заключений правил В.

На этапе 3 происходит комбинирование полученных функций принадлежности с помощью оператора MAX:

$$\mu_B = \max_{k=1,2} \left(\min \left\{ \mu_{A_1^k}(\widetilde{x}_1), \mu_{A_2^k}(\widetilde{x}_2), \mu_{B^k}(y) \right\} \right).$$



Алгоритмы нечёткого логического вывода





2) Алгоритм Ларсена

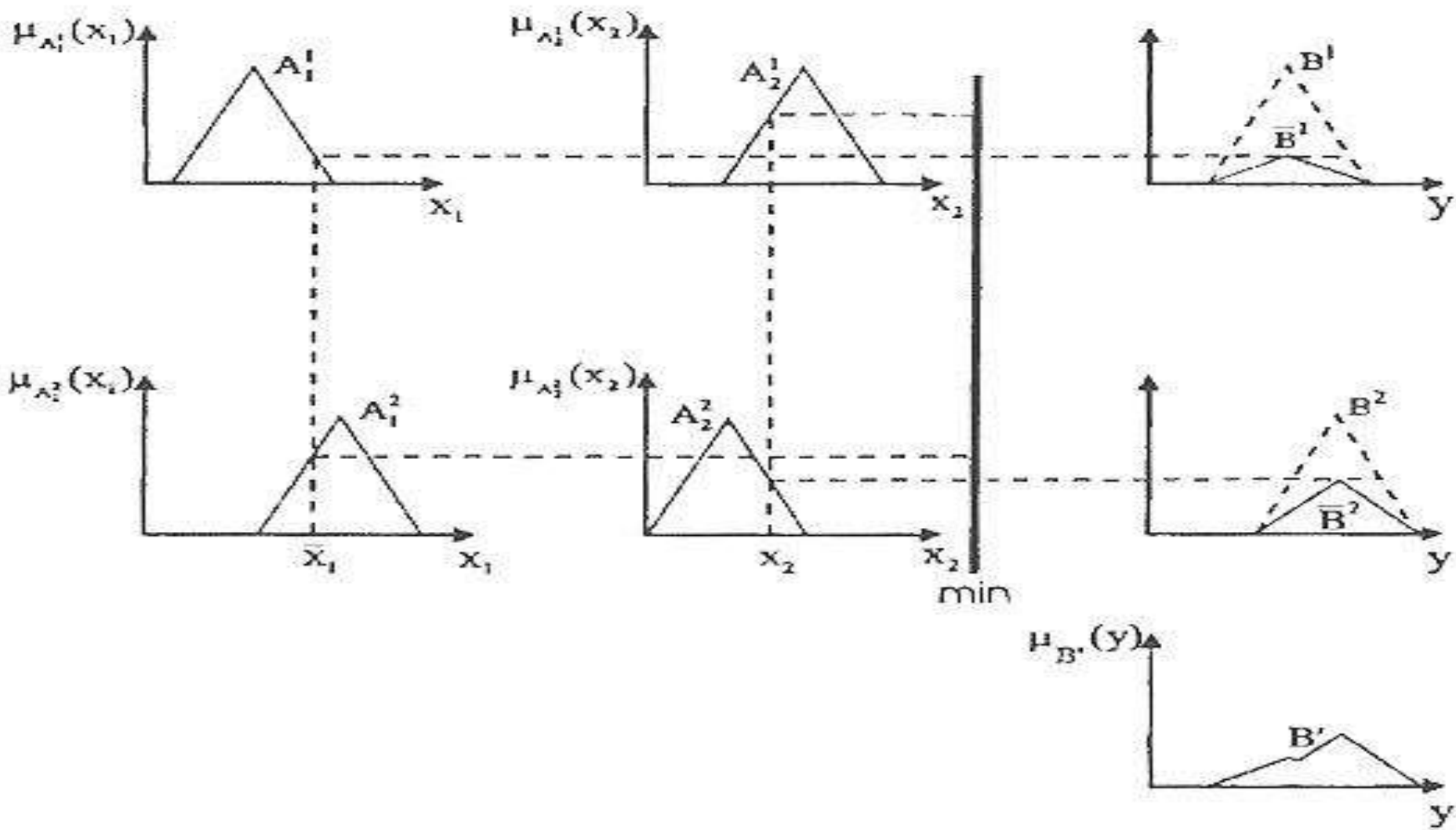
Рассматриваем на тех же входных условиях. Также вычисляются степени истинности предпосылок. Операция нечёткой импликации вводится по правилу произведения:

$$\mu_{R^k}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, y) = \mu_{A_1^k \times A_2^k \rightarrow B^k}(\dots) = \mu_{A_1^k \times A_2^k}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) \cdot \mu_{B^k}(y).$$

Композиция в алгоритме может проводиться как в виде операции максимума (дизъюнкции), так и в виде операции суммирования.



Алгоритмы нечёткого логического вывода





3) Алгоритм Цукамото

Система правил:

P_1 : если x есть A_1 и y есть B_1 , то z есть C_1 ;

P_2 : если x есть A_2 и y есть B_2 , то z есть C_2 .

При этом функции C , стоящие в заключении, должны быть монотонными.

Нечёткая импликация вводится как минимум функций принадлежности.



Алгоритмы нечёткого логического вывода

Далее находятся корни уравнений:

$$C_1(z) = \alpha_1;$$

$$C_2(z) = \alpha_2.$$

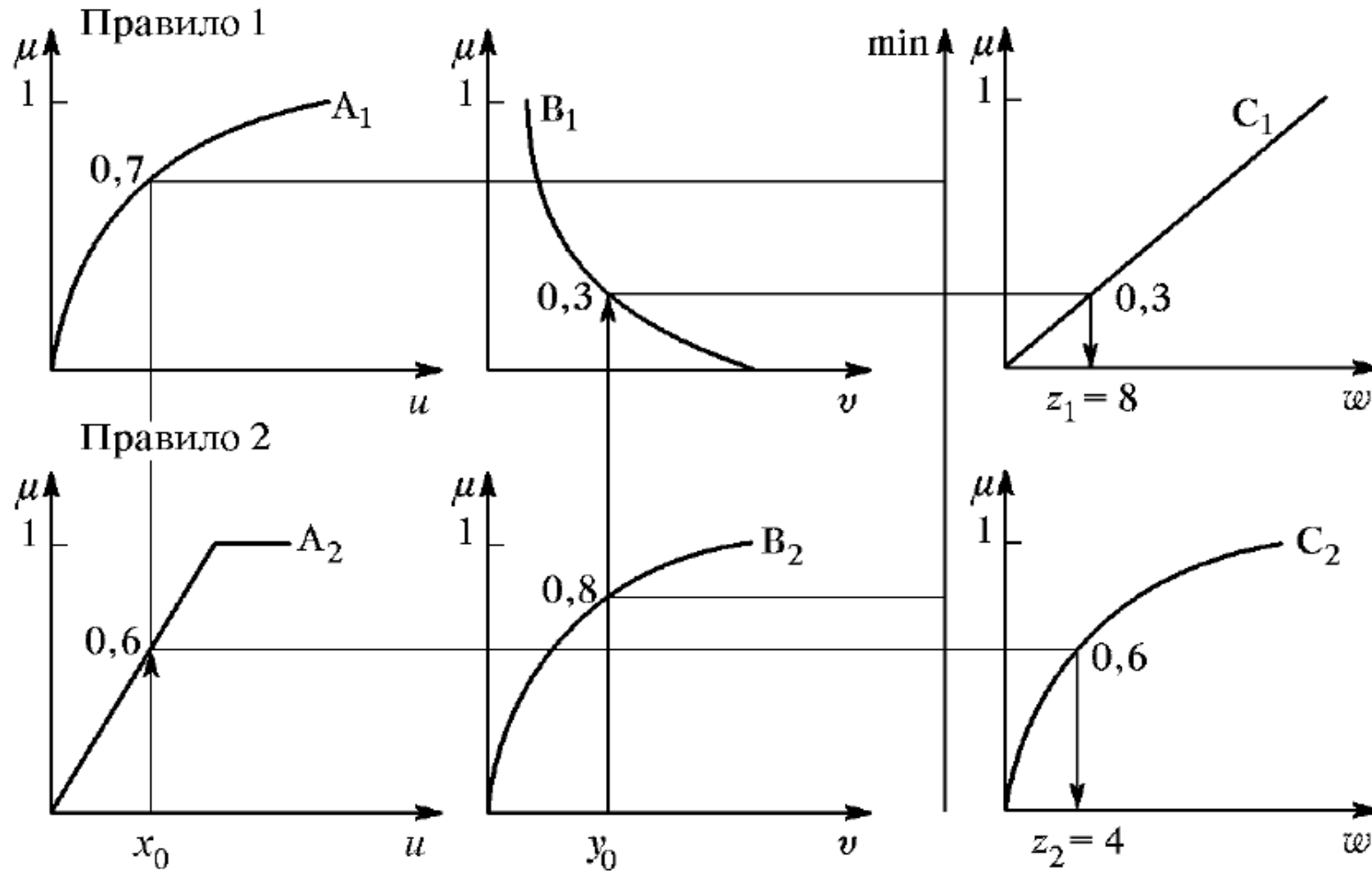
Корни z_1, z_2 – чёткие значения для каждого из исходных правил, а α_1, α_2 – параметры отсечения (значения функции принадлежности).

Композиция – чёткое значение переменной выхода – определяется как взвешенное среднее:

$$z_0 = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$



Алгоритмы нечёткого логического вывода



Таким образом,
эта система
вывода чёткая.



Алгоритмы нечёткого логического вывода

4) Алгоритм Сугэно

Заключения в правилах – линейные функции от входных параметров:

P_1 : если x есть A_1 и y есть B_1 , то $z_1 = a_1x + b_1y$;

P_2 : если x есть A_2 и y есть B_2 , то $z_2 = a_2x + b_2y$.

α_1, α_2 – параметры отсечения – также вычисляются с помощью конъюнкции (пересечения), и находятся индивидуальные выходы правил:

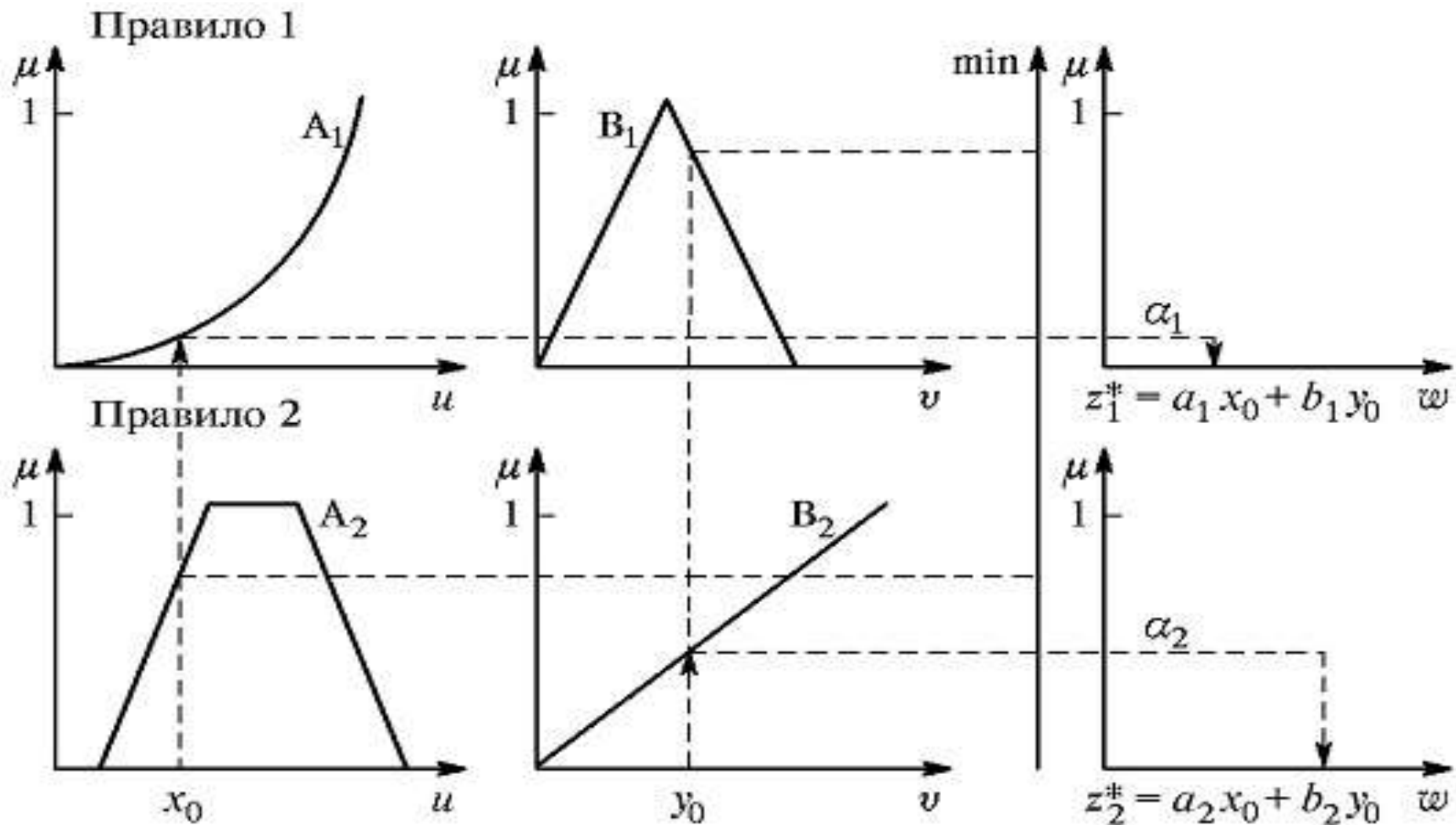
$$z_1^* = a_1x_0 + b_1y_0;$$

$$z_2^* = a_2x_0 + b_2y_0,$$

где x_0, y_0 – входные параметры. Композиция, как и в алгоритме Цукамото, вычисляется как взвешенное среднее.



Алгоритмы нечёткого логического вывода





5) Алгоритм Сугэно 0-го порядка (упрощенный)

Система правил:

P_1 : если x есть A_1 и y есть B_1 , то $z_1 = c_1$;

P_2 : если x есть A_2 и y есть B_2 , то $z_2 = c_2$.

то есть выходная переменная приравнивается просто к какой-то константе. В остальном алгоритм идентичен обычному алгоритму Сугэно.



Алгоритмы нечёткого логического вывода

